

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

RENATA BURGUETTI

ALGUNS TIPOS DE GRAFOS E  
APLICAÇÕES

Maringá

2022

# ALGUNS TIPOS DE GRAFOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Estadual de Maringá

Departamento de Matemática

Programa Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Marcos André Verdi

Maringá

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

B957a Burguetti, Renata  
Alguns tipos de grafos e aplicações / Renata  
Burguetti. -- Maringá, 2022.  
79 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcos André Verdi.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática, 2022.

1. Teoria dos grafos. 2. Árvores (Grafos). 3. Grafos  
eulerianos. 4. Grafos hamiltonianos. I. Verdi, Marcos  
André, orient. II. Universidade Estadual de Maringá.  
Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.  
III. Título.

CDD 22.ed. 511.5

Edilson Damasio CRB9-1.123

**RENATA BURGUETTI**

**ALGUNS TIPOS DE GRAFOS E APLICAÇÕES**

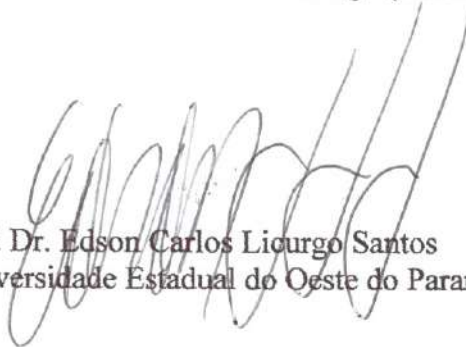
Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

**COMISSÃO JULGADORA:**



Prof. Dr. Marcos André Verdi

UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientador)



Prof. Dr. Edson Carlos Licurgo Santos

UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Toledo)



Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves  
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 20 de janeiro de 2022

Local de defesa: Videoconferência pelo link <https://meet.google.com/mdb-jahp-kfy>

*Dedico este trabalho a minha tia Edna e a minha avó Helena (in memória), que através da bênção de Deus, me deram carinho, amor e dedicação, nunca medindo esforços para me propiciar a melhor Educação.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por estar sempre comigo, dando-me sabedoria, força para vencer e por ter colocado pessoas especiais em meu caminho.

À minha família pelo incentivo, carinho e toda dedicação para concretização dos meus sonhos.

Aos colegas do Profmat que compartilharam esse momento e em especial aos amigos que o mestrado me deu, esses levarei para a vida toda, sem eles seria bem mais difícil concluir essa etapa.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcos André Verdi, por transmitir sua sabedoria, pelo dom da paciência e por me possibilitar realizar essa grande vitória em minha vida.

Aos meus amigos Adriano, Nelidy e Elaine que participaram dessa etapa final, muito obrigada.

A todos os professores do Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, em especial, ao Professor Thiago Fanelli Ferraiol e a Professora Marcela Duarte por toda dedicação e auxílio sempre quando solicitados.

Enfim, agradeço aos amigos que de uma forma ou outra, contribuíram para a execução deste trabalho.

*“Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência”. (Irene Albuquerque)*

# Resumo

Neste trabalho apresentamos a parte introdutória da Teoria de Grafos. Descrevemos também três tipos de grafos: árvores, grafos eulerianos e grafos hamiltonianos. Para cada tipo de grafo apresentado, apresentamos uma aplicação.

**Palavras-chave:** Grafos. Árvores. Grafos Eulerianos. Grafos Hamiltonianos.



# Abstract

In this paper we present an introductory part of Graph Theory. We also describe three types of graphs: trees, Eulerian graphs and Hamiltonian graphs. For each type of graph, we present an application.

**Keywords:** Graphs. Three. Eulerian Graphs. Hamiltonian Graphs.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – As sete pontes de Königsburg. . . . .	15
Figura 2 – Grafo que representa as pontes de Königsburg. . . . .	16
Figura 3 – Ilhas ligadas por uma ponte. . . . .	16
Figura 4 – Circuitos elétricos. . . . .	17
Figura 5 – À esquerda Gustav Robert Kirchhoff e à direita Arthur Cayley. . . . .	18
Figura 6 – Isômeros do pentano. . . . .	18
Figura 7 – Mapa de quatro cores. . . . .	19
Figura 8 – Dodecaedro e seu grafo associado. . . . .	19
Figura 9 – Rede social - Facebook. . . . .	20
Figura 10 – Rede de transporte. . . . .	21
Figura 11 – Modelos químicos. . . . .	21
Figura 12 – Proporções dos trabalhos. . . . .	23
Figura 13 – Estudos de conectividade funcional: 1) extração da série temporal das ROIs, 2) cálculo da correlação temporal entre os sinais das áreas escolhidas (matriz conectividade), 3) escolha do limiar do valor de correlação para ser utilizado no cálculo dos parâmetros de rede e 4) representação da rede de conexões pela teoria de grafos. . . . .	24
Figura 14 – Mapa de Carreiras:recorte parcial do MCar focando uma ocupação. . . . .	25
Figura 15 – Jogos realizados no torneio de vôlei. . . . .	26
Figura 16 – Ligações entre os planetas. . . . .	27
Figura 17 – Grafo, à esquerda, e seu complemento, à direita. . . . .	29
Figura 18 – Grafos completos $K_3$ , $K_4$ e $K_5$ . . . . .	30
Figura 19 – Grafo biparticionado. . . . .	30
Figura 20 – Grafo G, à esquerda, isomorfo ao Grafo H, à direita. . . . .	32
Figura 21 – Transformação isomorfa do Grafo G no Grafo H. . . . .	32
Figura 22 – Grafos isomorfos. . . . .	33
Figura 23 – Grafos não isomorfos. . . . .	33
Figura 24 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra. . . . .	35
Figura 25 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra. . . . .	35
Figura 26 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra. . . . .	36
Figura 27 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra. . . . .	36
Figura 28 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra. . . . .	37
Figura 29 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra. . . . .	37
Figura 30 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra. . . . .	38
Figura 31 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra. . . . .	38
Figura 32 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra. . . . .	39

Figura 33 – Alguns exemplos de árvores. . . . .	41
Figura 34 – Um grafo e sua árvore geradora. . . . .	43
Figura 35 – Um grafo valorado. . . . .	45
Figura 36 – Etapas iniciais do algoritmo de Kruskal. . . . .	46
Figura 37 – Etapas finais do algoritmo de Kruskal. . . . .	47
Figura 38 – $G_1$ é euleriano, $G_2$ é semieuleriano e $G_3$ não é nem euleriano nem semieuleriano. . . . .	48
Figura 39 – Ilustração da demonstração. . . . .	49
Figura 40 – Ilustração da demonstração. . . . .	50
Figura 41 – Um grafo não valorado. . . . .	52
Figura 42 – Primeira etapa do algoritmo de Fleury. . . . .	53
Figura 43 – Segunda etapa do algoritmo de Fleury. . . . .	53
Figura 44 – Terceira etapa do algoritmo de Fleury. . . . .	54
Figura 45 – Quarta etapa do algoritmo de Fleury. . . . .	54
Figura 46 – Quinta etapa do algoritmo de Fleury. . . . .	55
Figura 47 – Sexta etapa do algoritmo de Fleury. . . . .	55
Figura 48 – Sétima etapa do algoritmo de Fleury. . . . .	56
Figura 49 – Oitava etapa do algoritmo de Fleury. . . . .	56
Figura 50 – Nona etapa do algoritmo de Fleury. . . . .	57
Figura 51 – Décima etapa do algoritmo de Fleury. . . . .	57
Figura 52 – Um grafo hamiltoniano e um ciclo hamiltoniano. . . . .	58
Figura 53 – O grafo é hamiltoniano ou não? . . . . .	59
Figura 54 – Os vértices sem preenchimento serão removidos. . . . .	60
Figura 55 – O grafo resultante possui 4 componentes conexas. . . . .	60
Figura 56 – Um grafo. . . . .	62
Figura 57 – Construção do fecho. . . . .	63
Figura 58 – O fecho do grafo dado. . . . .	63
Figura 59 – Um grafo. . . . .	64
Figura 60 – Construção do fecho. . . . .	64
Figura 61 – Fecho do grafo dado. . . . .	65
Figura 62 – Um grafo. . . . .	67
Figura 63 – Grafos $\overline{K_1}$ , $K_1$ e $K_2$ . . . . .	68
Figura 64 – O grafo $C_{1,4}$ . . . . .	69
Figura 65 – $\overline{K_2}$ , $K_2$ e $K_1$ . . . . .	69
Figura 66 – O grafo $C_{2,5}$ . . . . .	69
Figura 67 – Um grafo não hamiltoniano. . . . .	71
Figura 68 – Um grafo não hamiltoniano. . . . .	71
Figura 69 – O grafo não hamiltoniano maximal contendo o grafo dado. . . . .	72
Figura 70 – Um grafo valorado. . . . .	75

Figura 71 – O grafo $G - v_3$ . . . . .	75
Figura 72 – Uma árvore ótima em $G - v_3$ . . . . .	76
Figura 73 – Um ciclo ótimo em $G$ . . . . .	77

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Áreas equivalentes a quantidade de pesquisas. . . . .	22
--	----

# Sumário

	INTRODUÇÃO . . . . .	13
1	GRAFOS E UM POUCO DE SUA HISTÓRIA . . . . .	15
1.1	As Pontes de Königsburg . . . . .	15
1.2	O Teorema das Quatro Cores . . . . .	18
1.3	O Uso dos Grafos Atualmente . . . . .	20
1.3.1	Ciências da Saúde . . . . .	23
1.3.2	Engenharias . . . . .	24
2	CONCEITOS BÁSICOS . . . . .	26
2.1	Preliminares . . . . .	26
2.2	Uma aplicação: O problema do menor caminho . . . . .	33
3	ALGUNS TIPOS DE GRAFOS E APLICAÇÕES . . . . .	41
3.1	Árvores . . . . .	41
3.1.1	Uma aplicação: O Problema da Conexão . . . . .	44
3.2	Grafos Eulerianos . . . . .	47
3.2.1	Uma aplicação: O Problema do Carteiro Chinês . . . . .	51
3.3	Grafos Hamiltonianos . . . . .	58
3.3.1	Uma Aplicação: O Problema do Caixeiro Viajante . . . . .	74
	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	78
	REFERÊNCIAS . . . . .	79

# Introdução

A Teoria dos Grafos está presente no nosso dia-a-dia, mais que imaginamos. Quando vamos em nossa rede social e relacionamos com alguma pessoa ou em uma escola participamos dos torneios interclasses, ambos estamos falando da Teoria de Grafos. Na rede social, cada um de nós forma um grafo com as conexões que estabelecemos com outros usuários. E nos torneios interclasses são os jogos realizados entre as equipes que podemos representar por meio de grafos.

A Teoria de Grafos tem uma origem relativamente recente na história da Matemática. Desenvolvida já no século *XX*, ela possui sua importância por se relacionar com diversas outras áreas da ciência, bem como em outras áreas da Matemática. Podemos dizer que ela surgiu a partir da indagação de moradores sobre um problema das pontes de Königsburg, uma cidade que atualmente é conhecida como Kaliningrad, na Rússia.

O problema das pontes foi resolvido por Leonhard Euler (1707-1783) um matemático suíço, que deu importantes contribuições na área da matemática, como no cálculo, trigonometria e na teoria dos grafos. Ele pode ser considerado o matemático mais produtivo do século XVIII, pois mesmo com sua cegueira, ele continuou a contribuir.

Um outro problema semelhante ao das pontes e que também forneceu contribuição para a Teoria dos Grafos é o jogo *Icosian Game*. Este jogo foi proposto pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865). O objetivo do jogo era passar por todos os 20 vértices de um dodecaedro regular apenas uma única vez, sendo que o jogo deveria começar e finalizar pelo mesmo vértice. A ideia do jogo está relacionada com o conceito de ciclos hamiltonianos, que é um dos problemas estudados na Teoria dos Grafos.

O problema das pontes estudado por Euler e o jogo do Hamilton são os dois principais problemas que propiciaram o desenvolvimento da Teoria dos Grafos, neste trabalho iremos apresentar os conceitos trabalhados em ambos.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 1 apresentaremos um pouco da história dos grafos, mostrando problemas motivadores ao desenvolvimento desta área, como o problema das pontes de Königsburg e o Teorema das Quatro Cores. Além disso, apresentaremos alguns usos dos grafos atualmente que estão presentes em outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, nas Ciências da Saúde.

No Capítulo 2 apresentaremos a definição precisa de grafos, além de conceitos e resultados elementares desta teoria. Apresentamos também uma aplicação: dado um conjunto de cidades conectadas por algumas estradas, determinar o menor caminho entre duas cidades específicas. Este problema pode ser resolvido usando o algoritmo Dijkstra,

apresentado no final do Capítulo 2.

O Capítulo 3 contém a parte principal deste trabalho. Lá apresentamos de maneira formal três importantes tipos de grafos: árvores, grafos eulerianos e grafos hamiltonianos. Para cada um desses tipos de grafos apresentamos um problema, juntamente com um algoritmo ou método para resolvê-lo.



# 1 Grafos e um pouco de sua história

Neste capítulo apresentaremos dois problemas importantes no desenvolvimento da Teoria dos Grafos: as pontes de Königsburg e o Teorema das Quatro Cores. Além disso, apresentaremos algumas aplicações dos grafos na atualidade.

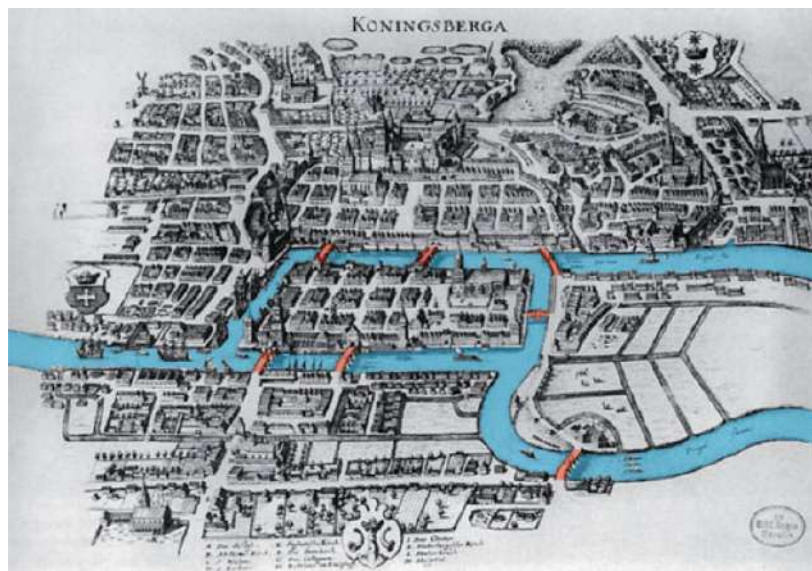
Para a elaboração deste capítulo, tomamos como base os trabalhos de Rosenhouse e Taalman (2011), Netto e Jurkiewicz (2009), Netto (2003), Viali (2019), Costa (2011), Braganholo (2019), Ostroski e Menoncini (2009), Uliana et al. (2018).

## 1.1 As Pontes de Königsburg

Nessa seção vamos apresentar o problema das pontes de Königsburg e como ele foi solucionado por Euler.

Na cidade que atualmente é conhecida como Kaliningrad, na Rússia, existiam sete pontes que ligavam quatro pedaços de terra divididas pelo rio Pregel. Os moradores da cidade se perguntavam se era possível caminhar pela cidade de maneira contínua cruzando as sete pontes sem passar duas vezes por qualquer uma dessas pontes.

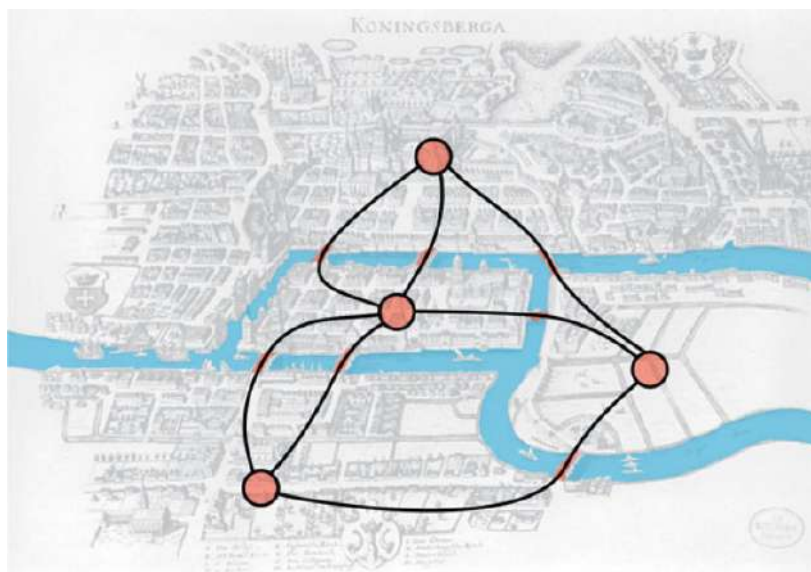
Figura 1 – As sete pontes de Königsburg.



Fonte: Figura de Rosenhouse e Taalman (2011).

Leonard Euler em 1735 teve conhecimento do problema e apresentou uma solução por meio de um modelo abstrato. Ele considerou cada porção de terra como um ponto ou vértice, e cada ponte como uma linha ou aresta que conectava esses vértices.

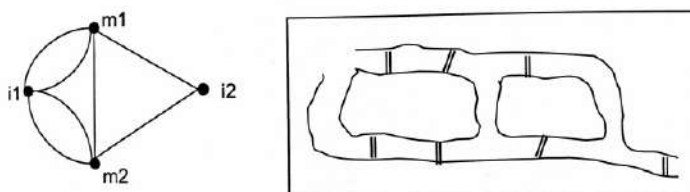
Figura 2 – Grafo que representa as pontes de Königsburg.



Fonte: Figura de Rosenhouse e Taalman (2011).

Euler observou que o número de passagens de uma margem para uma ilha, ou entre duas ilhas, era sempre ímpar.

Figura 3 – Ilhas ligadas por uma ponte.



Fonte: Figura de Netto e Jurkiewicz (2009).

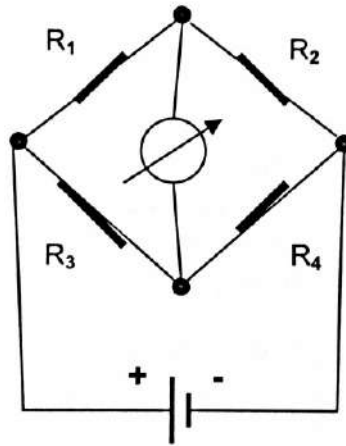
Veja na Figura 3 onde cada ponte é representada por uma linha e cada margem, ou ilha por um ponto. Assim, tudo indica que se pode passar, mas em algum momento não é possível retornar. Para que o passeio fosse possível cada massa de terra deveria se ligar a outra por um número par de pontes. Euler não se aprofundou muito no assunto, pois apesar de ter resolvido o problema das pontes, ele não via conexão deste problema com a matemática (SÁ; SILVA, 2016). Este fato pode ter sido um fator importante para que a teoria dos grafos tivesse um intervalo de mais de 100 anos sem grandes desenvolvimentos.

Segundo Netto (2003), somente depois desse tempo, que em 1847 que Kirchhoff usou os grafos no estudo de circuitos elétricos. Com esse feito, criou a teoria das árvores (classe de grafos, que serão estudadas no Capítulo 2).

Na Figura 4 podemos ter uma noção dos tipos de problemas que aparecem. Nela

consta o esquema de um circuito elétrico conhecido como **ponte de Wheatstone**, que é usado para medir a resistência elétrica. Podemos observar que o aparelho que o contém, as resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  podem ser modificadas à vontade e a resistência  $R_4$  é a que vai ser medida.

Figura 4 – Circuitos elétricos.



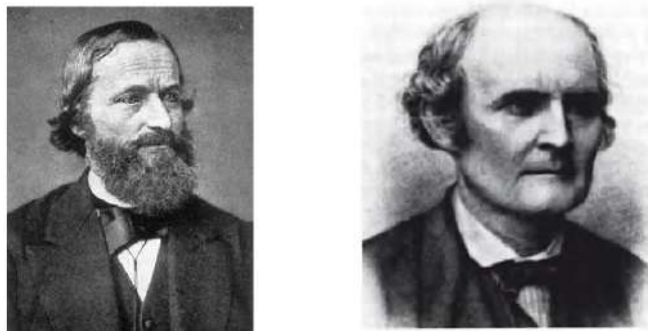
Fonte: Figura de Netto e Jurkiewicz (2009).

O instrumento de medida (galvanômetro) é o círculo com a seta, e na parte de baixo do esquema há um símbolo que representa uma fonte de energia. Esse medidor, por exemplo, é utilizado por qualquer técnico de televisão.

Um modelo de grafo pode ser construído para representar este circuito e as propriedades deles podem ser estudadas, inclusive com recursos teóricos desenvolvidos pelo próprio Kirchhoff (NETTO; JURKIEWICZ, 2009, p.3).

Seguindo a mesma teoria que Kirchhoff, ou seja, a teoria das árvores, dez anos mais tarde em 1857, Cayley apesar de ter outras aplicações em mente, destacava a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos, que são compostos de carbono e hidrogênio com cadeias abertas. “Para recordar um pouco de química diremos que dois compostos diferentes são isômeros quando possuem a mesma composição percentual (e, portanto, a mesma fórmula condensada)”(NETTO; JURKIEWICZ, 2009, p.3).

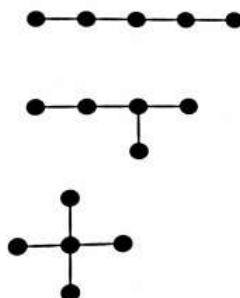
Figura 5 – À esquerda Gustav Robert Kirchhoff e à direita Arthur Cayley.



Fonte: Figura de (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002) e (EVES, 2011).

Na Figura 6, os esquemas representam aos três isômeros do pentano ( $C_5H_{12}$ ), correspondem apenas pelas ligações entre seus átomos de carbono, sabendo-se que o carbono tem valência 4 (ou seja, um átomo de carbono pode se ligar a um máximo de 4 outros átomos).

Figura 6 – Isômeros do pentano.



Fonte: Figura de Netto e Jurkiewicz (2009).

Observe que em cada esquema contém 12 posições vazias que irão receber os átomos de hidrôgeno.

Segundo Netto e Jurkiewicz (2009), Cayley conseguiu desenvolver uma técnica na qual poderia determinar o número de diferentes isômeros de um hidrocarboneto. Como exemplo, podemos citar o tridecano  $C_{13}H_{28}$ , que possui 802 isômeros.

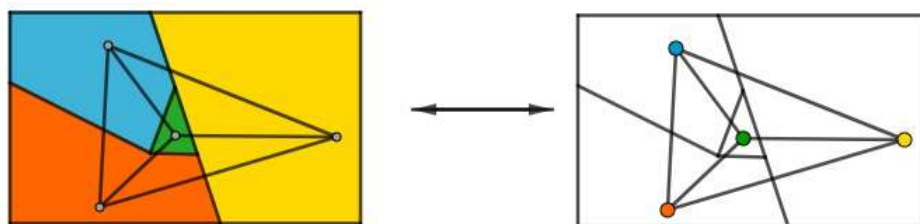
## 1.2 O Teorema das Quatro Cores

O Teorema das Quatro Cores teve origem por essa época, na correspondência entre Hamilton e Augusto de Morgan. Este problema foi proposto por um aluno de De Morgan. O aluno era Frederick Guthrie, mas o problema veio através do seu irmão, Francis Guthrie,

que trabalhava com mapas. Em sua prática com a cartografia, seu irmão disse que ao desenhar seus mapas, sabia que para colorir as regiões nelas representadas, usaria no máximo 4 cores diferentes.

Mediante isso, Frederick Guthrie resolveu dar atenção ao problema, de um ponto de vista matemático. “Ele tomou um mapa e associou os pontos as suas regiões e uniu dois pontos por uma linha, quando as regiões correspondentes tinham uma fronteira em comum, conforme Figura 7 ” (NETTO; JURKIEWICZ, 2009, p.3).

Figura 7 – Mapa de quatro cores.

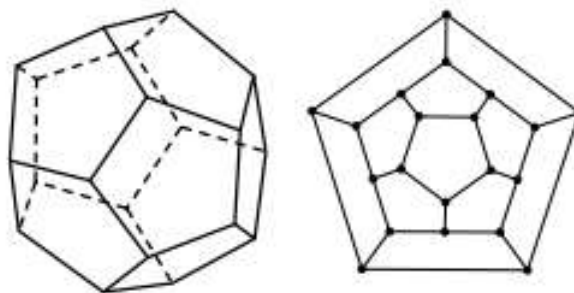


Fonte: Figura de Viali (2019).

Apesar de parecer simples a prova deste problema, que para colorir regiões dos mapas era necessário usar no máximo 4 cores, não foi tão simples assim. Muitos tentaram provar, mas nem Frederick Guthrie e nem seus contemporâneos conseguiram resolvê-lo. Sua prova só foi possível em 1976 com a ajuda extensiva dos computadores.

O matemático Hamilton contribuiu nesta área com o jogo “*The Icosian Game*”. Segundo Costa (2011) é um jogo que envolvia o dodecaedro e seus 20 vértices, os quais eram denominados com nomes das cidades importantes. O objetivo deste jogo era passar uma única vez por cada uma das cidades, começando e terminando na mesma cidade, isso usando as 30 arestas do dodecaedro.

Figura 8 – Dodecaedro e seu grafo associado.



Fonte: Figura de Costa (2011).

Esse jogo era parecido com o problema das pontes, onde é buscado soluções por

meio de um ciclo hamiltoniano.

**Definição 1.** *Seja  $G$  um grafo. Um caminho em  $G$  que passa uma única vez por cada vértice de  $G$  é chamado caminho Hamiltoniano. Se, além disso, o caminho começa e termina no mesmo vértice, o caminho é chamado ciclo Hamiltoniano. Por fim, se  $G$  possui um ciclo Hamiltoniano, dizemos que  $G$  é um grafo Hamiltoniano.*

Mediante a problemas como citado anteriormente, foi que ao longo do século  $XX$ , muitos matemáticos se interessaram pelos estudos de grafos e assim se formou um corpo teórico, que atualmente permite a abordagem de muitos problemas novos. “Centenas de artigos são publicados anualmente e novos livros estão sendo sempre sendo editados em todo o mundo” (NETTO; JURKIEWICZ, 2009, p.4).

### 1.3 O Uso dos Grafos Atualmente

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de grafos presentes no nosso dia a dia.

A mais simples das aplicações que podemos perceber são as redes sociais, como por exemplo, no Facebook, pela análise das preferências de amigos e nas curtidas das páginas, veja Figura 9.

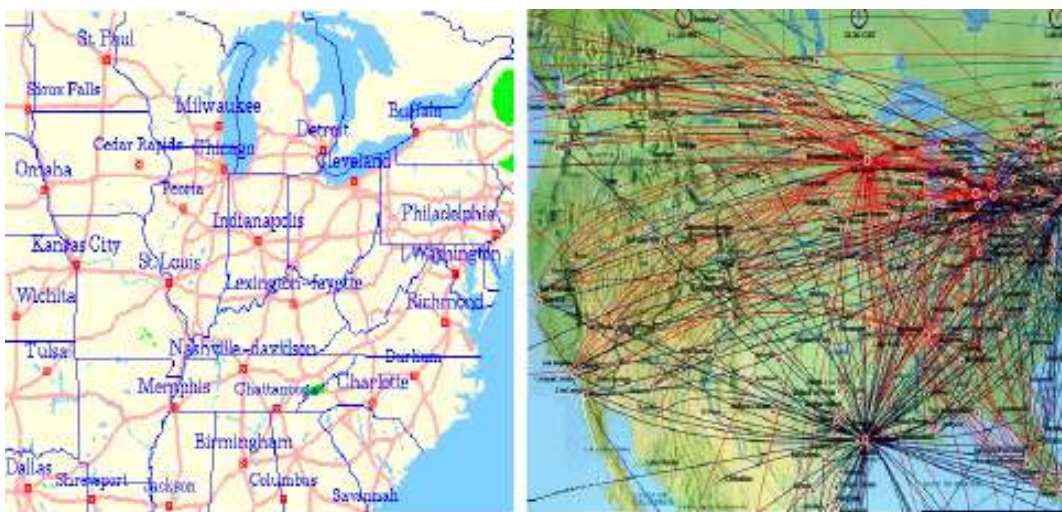
Figura 9 – Rede social - Facebook.



Fonte: Figura de Braganholo (2019).

Na rede de transporte ele também está presente, principalmente na tomada de decisão em pegar o caminho que tenha o menor custo para o transporte de carga entre duas cidades.

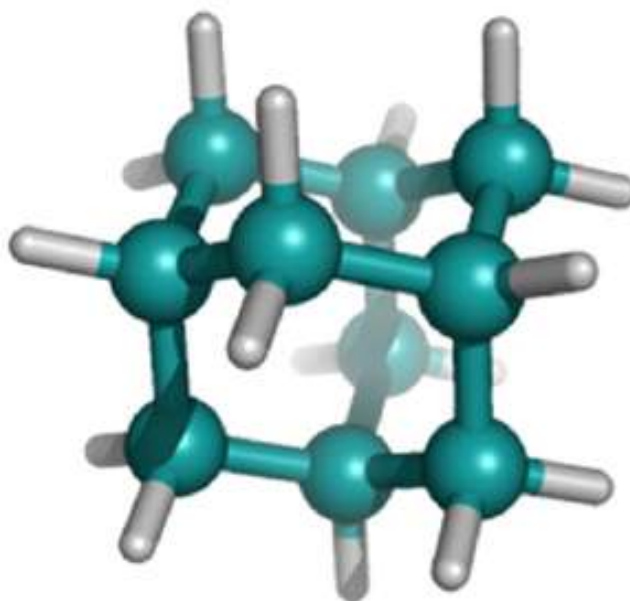
Figura 10 – Rede de transporte.



Fonte: Figura de Viali (2019).

Outro exemplo é nos modelos químicos, conforme a Figura 11.

Figura 11 – Modelos químicos.



Fonte: Figura de Viali (2019).

Os grafos também estão presentes em algumas empresas, como por exemplo, a Amazon que utiliza eles para sugestões de compras a seus clientes. Além desses exemplos de grafos citados anteriormente, existe muitos outros em nosso dia a dia.

Com a disciplina, Pesquisa Operacional foi que a partir da década de 1950, começou a utilizar intensamente os modelos de grafos, em busca de melhores soluções para problemas

de projeto, organização e distribuição. Segundo Ostroski e Menoncini (2009) o auge da teoria dos grafos aconteceu a partir de 1970 com o desenvolvimento acelerado dos computadores.

De acordo com Netto (2003) a teoria dos grafos chegou no Brasil em 1968 no **I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Desde então, universidades como por exemplo: UFRJ, USP e UNICAMP, começaram a realizar trabalhos de pesquisa sobre teoria dos grafos. Hoje em dia, algumas dessas universidades possuem pesquisadores em teoria de grafos em seus quadros de professores.

Esses pesquisadores têm suas pesquisas vinculadas a órgãos nacionais de fomento à pesquisa como a CAPES.

A teoria dos grafos, nessa perspectiva, possui entre os anos 2014 à 2018, 1538 dissertações e 638 teses publicado no Banco de Dissertações de Teses da CAPES.

O presente trabalho se propõe a analisar apenas um recorte desse panorama, que corresponde aos trabalhos de dissertações publicados em 2018.

Na Tabela 1 estão apresentadas as áreas equivalentes a quantidades de pesquisas.

Tabela 1 – Áreas equivalentes a quantidade de pesquisas.

<b>ÁREAS</b>	<b>NÚMERO TOTAL</b>
Ciências Exatas e da Terra	61
Engenharias	18
Ciências da Saúde	3
Multidisciplinar	9

Os dados acima, traduzidos na Figura 12, indicam a seguinte proporção de trabalhos.



Figura 12 – Proporções dos trabalhos.



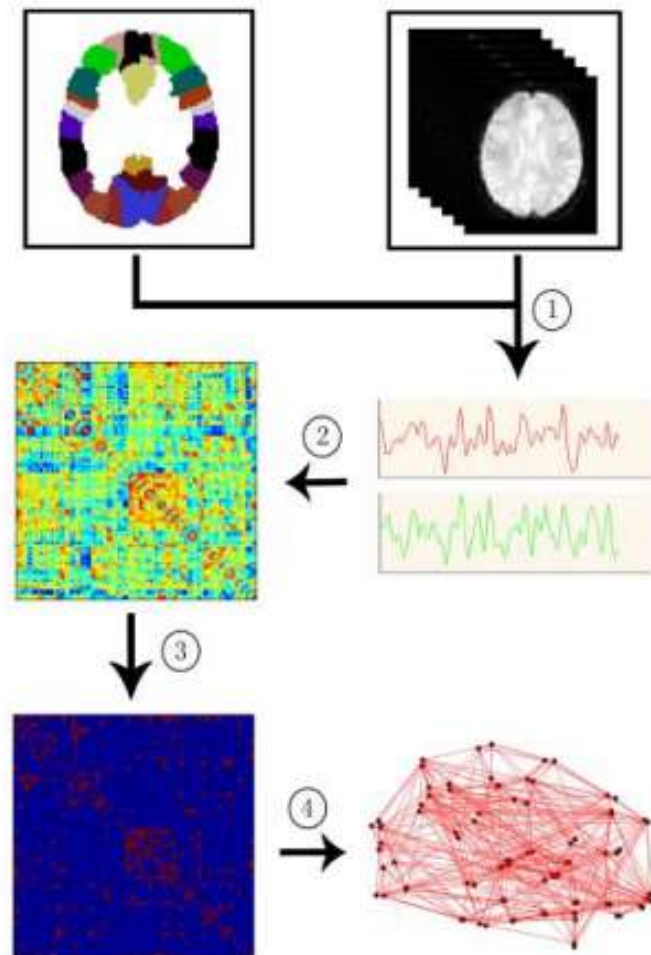
Na Figura 12, podemos observar que os grafos estão presentes em várias áreas de pesquisa, sendo sua maior porcentagem, 64%, está na área Ciências Exatas e da Terra e sua menor porcentagem, 3%, está na área Ciências da Saúde.

A seguir apresentaremos um pouco sobre a utilização dos grafos nas dissertações das áreas: Ciência da Saúde e Engenharias.

### 1.3.1 Ciências da Saúde

No trabalho sobre **Avaliação dos efeitos do envelhecimento na hemodinâmica cerebral por Imagem de Ressonância Magnética** podemos observar que as medidas de conectividade funcional (FC) foram obtidas em análises por teoria dos grafos, conforme a imagem a seguir.

Figura 13 – Estudos de conectividade funcional: 1) extração da série temporal das ROIs, 2) cálculo da correlação temporal entre os sinais das áreas escolhidas (matriz conectividade), 3) escolha do limiar do valor de correlação para ser utilizado no cálculo dos parâmetros de rede e 4) representação da rede de conexões pela teoria de grafos.



Fonte: Figura de Wang Jinhui; Zuo (2010 apud SILVA, 2018).

### 1.3.2 Engenharias

De acordo com Netto e Jurkiewicz (2009, p.4) “os modelos de grafo tem sido essenciais no campo cada vez mais presente na gestão de recursos, planejamento de transportes e otimização de recursos humanos”. No que compete a área de gestão, no trabalho **Identificação de comportamento em carreiras profissionais usando técnicas de ciência de redes** somos apresentados a empresa VAGAS.com que é uma das principais empresas de recrutamento on-line do Brasil.

A empresa criou um MAPA de Carreiras (MCAR), ilustrado na Figura 14, que é um serviço gratuito e o objetivo é a movimentação de um indivíduo por uma sequência de ocupações, ou seja, a carreira profissional.

Figura 14 – Mapa de Carreiras:recorte parcial do MCar focando uma ocupação.



Fonte: Figura de Uliana et al. (2018, p. 8).

Neste MAPA de Carreiras, as informações são internamente armazenadas em um grafo, que são periodicamente atualizadas. Os vértices possuem atributos tais como a distribuição salarial, a distribuição do tempo de permanência em uma ocupação. As arestas que conectam as ocupações representam movimentações entre elas, ou seja, o fluxo de pessoas que exercia uma certa ocupação e passou a exercer outra.

## 2 Conceitos básicos

Neste capítulo apresentaremos as definições e resultados mais elementares sobre a teoria dos grafos. Seguimos aqui os livros (BONDY; MURTY, 1976) e (JURKIEWICZ, 2009). Finalizamos o caminho apresentando uma importante aplicação da Teoria de Grafos: o problema do menor caminho.

### 2.1 Preliminares

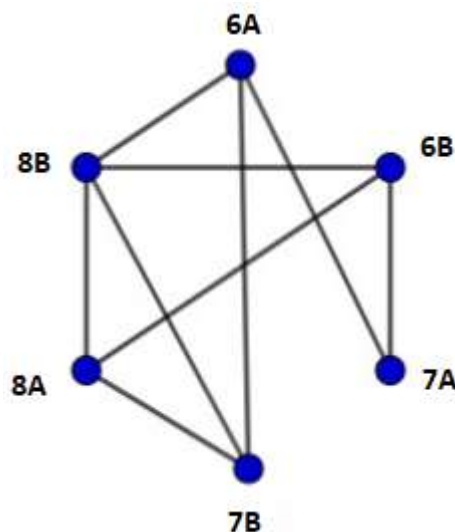
Algumas situações podem ser representadas por um diagrama, consistindo de conjunto de pontos juntamente com linhas que ligam alguns destes pontos, como nos exemplos abaixo.

**Exemplo 2.1.** *Numa escola foi realizado um torneio de vôlei, no qual participaram as turmas 6A, 6B, 7A, 7B, 8A e 8B. Até o momento, os seguintes jogos foram realizados:*

6A	jogou com	7A, 7B e 8B
6B	jogou com	7A, 8A e 8B
7A	jogou com	6A e 6B
7B	jogou com	6A, 8A e 8B
8A	jogou com	6B, 7B e 8B
8B	jogou com	6A, 6B, 7B e 8A

*Essas informações podem ser representadas no seguinte diagrama.*

Figura 15 – Jogos realizados no torneio de vôlei.

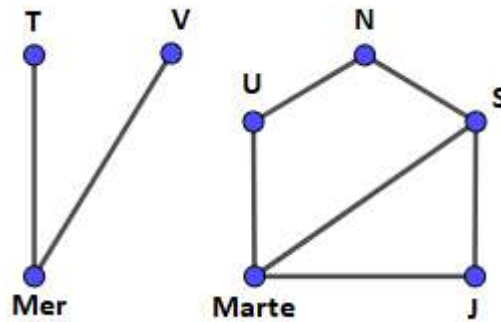


Fonte: A autora.

**Exemplo 2.2.** São estabelecidas ligações entre os oito planetas do sistema solar. Foguetes viajam ao longo das seguintes rotas: Terra-Mercúrio, Mercúrio-Vênus, Urano-Netuno, Netuno-Saturno, Saturno-Júpiter, Saturno-Marte, Marte-Urano. Um viajante pode ir da Terra para Marte?

Podemos responder essa pergunta facilmente fazendo um diagrama, em que cada planeta será representado pela inicial de seu nome, exceto Mercúrio e Marte, que serão designados por Mer e Marte, respectivamente.

Figura 16 – Ligações entre os planetas.



Fonte: A autora.

Da figura, vemos que a resposta é não.

Os diagramas que aparecem nos exemplos acima são representações de uma estrutura matemática chamada *grafo*. Os pontos representados acima são chamados de **vértices**, enquanto que as linhas que ligam alguns destes pontos são chamadas de **arestas**. De uma maneira mais geral, grafos podem ser definidos da seguinte forma.

**Definição 2.1.** Seja  $V$  um conjunto finito e denote por  $V^{(2)}$  o conjunto dos pares não ordenados de elementos de  $V$ . Um grafo  $G$  é um par  $G = (V(G), A(G))$ , onde  $A(G)$  é um subconjunto de  $V^{(2)}$ . Os elementos de  $V(G)$  são chamados de vértice e os elementos de  $A(G)$  são chamados de arestas. Quando não houver risco de confusão, escreveremos apenas  $V$  e  $A$  no lugar de  $V(G)$  e  $A(G)$ , respectivamente.

No Exemplo 2.1, temos que

$$V = \{6A, 6B, 7A, 7B, 8A, 8B\}$$

e

$$A = \{\{6A, 7A\}, \{6A, 7B\}, \{6A, 8B\}, \{6B, 7A\}, \{6B, 8A\}, \{6B, 8B\}, \{7B, 8A\}, \{7B, 8B\}, \{8A, 8B\}\}.$$

Observamos que o diagrama correspondente é apenas uma *representação geométrica* do grafo, mas é de extrema utilidade quando trabalhamos com grafos. Inclusive, grande parte da terminologia utilizada no estudo de grafos vem desta representação.

Quando existe uma aresta ligando dois vértices, dizemos que os vértices são *adjacentes* e que a aresta é *incidente* aos vértices. Nesse caso, dizemos ainda que os vértices são os extremos da aresta dada e que os vértices são ligados pela aresta. O número de vértices será representado pelo símbolo  $|V(G)|$  ou por  $n(G)$ , enquanto que o número de arestas será representado pelo símbolo  $|A(G)|$  ou pela letra  $m(G)$ . Quando estiver claro qual é o grafo com o qual estamos trabalhando, omitiremos o símbolo  $(G)$  nas notações acima, escrevendo somente  $|V|$ ,  $n$ ,  $|A|$  ou  $m$ . Para simplificar a notação, às vezes também escrevemos  $vw$  ou  $wv$  para indicar a aresta  $\{v, w\}$ . O número de arestas que incidem sobre o vértice  $v$  (isto é, a quantidade de arestas ligadas ao vértice  $v$ ) é chamado **grau** de  $v$  e denotada por  $d(v)$ . Denotaremos por  $\Delta(G)$  e  $\delta(G)$  os graus máximo e mínimo, respectivamente, de vértices de  $G$ .

**Observação:** Em estudos mais gerais na teoria dos grafos, também são considerados casos em que um vértice é adjacente a si mesmo (neste caso, a aresta é chamada de **laço**) ou que um par de vértices é ligado por mais de uma aresta. Neste trabalho não consideraremos estes casos. Os grafos considerados aqui são chamados de **grafos simples**, mas que chamaremos simplesmente de grafos.

Uma propriedade elementar dos grafos, relacionando os graus dos vértices com o número de arestas, pode ser obtida por uma simples contagem: como cada aresta é incidente à dois vértices, quando somamos o número de arestas incidentes em cada vértice consideramos cada aresta duas vezes, obtendo assim o dobro do número de arestas. Obtemos assim o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.** *A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.*

Dizemos que um vértice é par se seu grau for par e que o vértice é ímpar se seu grau for ímpar. Como a soma dos graus deve ser sempre um número par, temos a seguinte consequência do resultado anterior:

**Corolário 2.1.** *O número de vértices ímpares em um grafo arbitrário tem que ser par.*

Com este resultado podemos responder à algumas questões simples que possam ser postas em termos de grafos.

**Exemplo 2.3.** *Uma turma tem 30 alunos. É possível que nove deles tenham 3 amigos cada (na turma), onze tenham 4 amigos e dez tenham cinco amigos?*

*A resposta é não. Uma vez que dada a relação de quais alunos são amigos, podemos considerar um grafo para representar situação: os vértices são os alunos e dois vértices são*

adjacentes se os alunos correspondentes são amigos. Na situação descrita, teríamos 19 vértices ímpares, o que é impossível em um grafo.

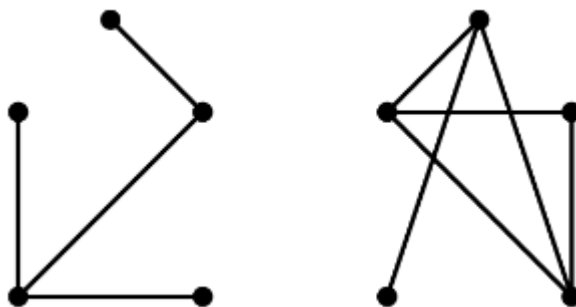
**Exemplo 2.4.** *É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano, de tal forma que cada um intersecta exatamente outros 3?*

Novamente a situação não é possível. Se considerarmos cada aresta como um vértice de um grafo e impormos a condição de que dois vértices são adjacentes se os segmentos correspondentes se intersectam, teríamos um grafo com 9 vértices ímpares, o que é impossível.

A seguir exibimos alguns conceitos da teoria de grafos, bem como alguns tipos particulares de grafos.

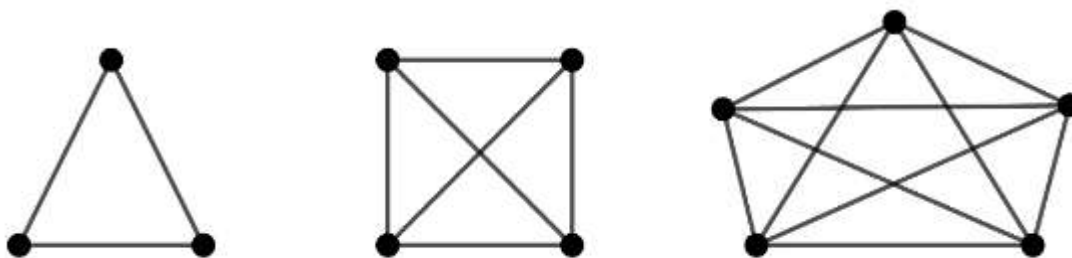
- **Complemento de um grafo:** O complemento de um grafo  $G = (V, A)$  é o grafo  $\bar{G} = (V, V^{(2)} \setminus A)$  (aqui o símbolo “ $\setminus$ ” denota a diferença entre conjuntos). Desta forma, o complemento de  $G$  é o grafo que possui os mesmos vértices de  $G$  e tal que para  $v, w \in G$  temos  $vw$  é uma aresta de  $\bar{G}$  se e somente se  $vw$  não é uma aresta de  $G$ . Na Figura 17, temos um grafo e seu complemento.

Figura 17 – Grafo, à esquerda, e seu complemento, à direita.



Fonte: A autora.

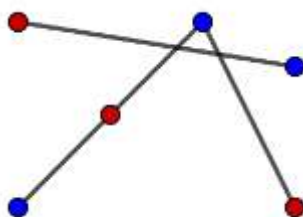
- **Grafo completo:** Um grafo  $G = (V, A)$  é um grafo completo quando todos os seus vértices são adjacentes, isto é, quando  $A = V^{(2)}$ . Um grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ . Quando  $n = 3$ , dizemos que o grafo é um triângulo. Na Figura 18 exibimos os grafos  $K_3$ ,  $K_4$  e  $K_5$ , respectivamente.

Figura 18 – Grafos completos  $K_3$ ,  $K_4$  e  $K_5$ .

Fonte: A autora.

- **Grafo vazio:** Um grafo vazio é um grafo que não possui arestas. Desta forma, um grafo vazio é o complemento de um grafo completo.
- **Grafo regular:** Quando todos os vértices de um grafo possuem o mesmo grau, dizemos que o grafo é regular. Usaremos a expressão grafo  $d$ -regular para indicar que o grafo possui todos os vértices de grau  $d$ .
- **Grafo biparticionável:** Um grafo  $G = (V, A)$  é biparticionável quando existem dois subconjuntos disjuntos  $U, W \subset V$  tais que  $V = U \cup W$  e cada aresta de  $G$  possui um extremo em  $U$  e outro em  $W$ . Neste caso, dizemos ainda que o par  $\{U, W\}$  forma uma bipartição de  $G$ . Na Figura 19, o conjunto formado pelos pontos em azul e o conjunto dos pontos vermelhos formam uma bipartição do grafo.

Figura 19 – Grafo biparticionado.



Fonte: A autora.

- **Subgrafo:** Um grafo  $H = (V(H), A(H))$  é um subgrafo do grafo  $G = (V(G), A(G))$  se  $V(H) \subset V(G)$  e  $A(H) \subset A(G)$ . Dado um subconjunto  $V' \subset V(G)$ , o subgrafo de  $G$  cujo conjunto de vértices é  $V'$  e o conjunto de arestas é formado pelas arestas de  $G$  que tem ambos os extremos em  $V'$  é chamado de **subgrafo induzido** por  $V'$ , e denotado por  $G[V']$ . O subgrafo de  $G$  obtido eliminando os vértices em  $V'$ , juntamente com as arestas adjacentes a esses vértices, é denotado por  $G - V'$ . Se  $A' \subset A(G)$  é um subconjunto qualquer, então o subgrafo de  $G$  tendo como vértices os



vértices extremos de elementos de  $A'$  e tendo como conjunto de arestas  $A'$  é chamado de **subgrafo induzido** por  $A'$ .

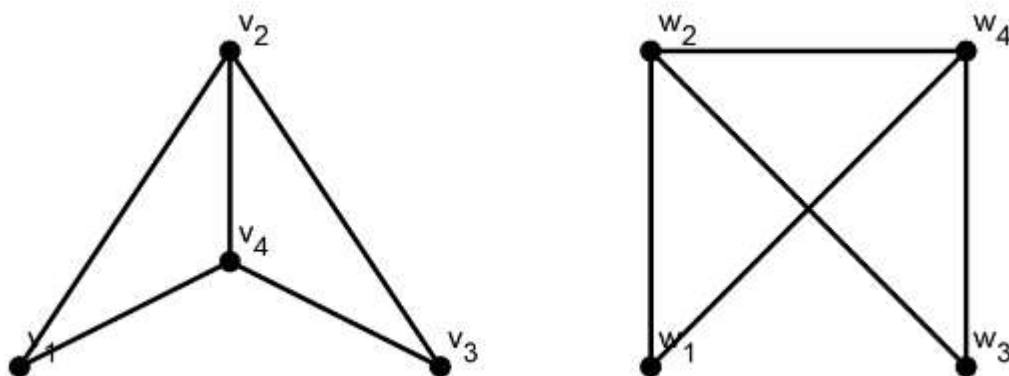
- **Subgrafo Gerador:** Um **subgrafo gerador** de  $G$  é um subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $V(H) = V(G)$ .
- **Passeios, trilhas, caminhos e ciclos:** Um **passeio**  $P$  em um grafo  $G$  é uma sequência finita  $(v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, v_n, a_n)$  cujos termos são alternadamente vértices  $v_i$  e arestas  $a_j$  tais que para todo  $i$  com  $1 \leq i \leq n$ ,  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são extremos de  $a_i$ . Observamos que não é necessário que os vértices nem as arestas em um passeio sejam dois a dois distintos. Como estamos trabalhando somente com grafos simples, um passeio é determinado pela sequência de seus vértices e assim indicaremos o passeio simplesmente por  $v_0v_1 \dots v_n$ . O comprimento do passeio é o inteiro  $n$ . Os vértices  $v_0$  e  $v_n$  são chamados **origem** e **término** de  $P$ , respectivamente. Uma **seção** de  $P$  é um passeio que é uma subsequência de termos consecutivos de  $P$ . Quando as arestas em  $P$  são duas a duas distintas,  $P$  é chamado uma **trilha**. Se, além disso, os vértices são dois a dois distintos,  $P$  é chamado um **caminho**. Usaremos a expressão  $(v_0, v_n)$ -caminho para indicar um caminho com origem  $v_0$  e término  $v_n$ . Se a origem e o término do passeio  $P$  coincidem, dizemos que  $P$  é **fechado**. Se  $P$  for uma trilha fechada com  $v_1, \dots, v_{n-1}$  dois a dois distintos,  $P$  é chamado um **circuito** ou **ciclo**.
- **Conexidade e componentes conexas:** Um grafo  $G$  é dito ser **conexo** quando para quaisquer dois vértices distintos  $u$  e  $v$  existe um  $(u, v)$ -caminho. Podemos definir a seguinte relação sobre os vértices de um grafo: definimos que  $u \sim v$  se  $u = v$  ou se existe um caminho ligando  $u$  a  $v$ . Esta é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos vértices de  $G$ :
  1. **Reflexividade:** Pela própria definição, para todo  $u \in V$  temos que  $u \sim u$ .
  2. **Simetria:** Se temos um caminho ligando  $u$  a  $v$ , então o caminho percorrido na ordem reversa liga  $v$  a  $u$ .
  3. **Transitividade:** Se temos um caminho ligando  $u$  e  $v$  e um caminho ligando  $v$  e  $w$ , então basta concatenar os caminhos para obter um caminho ligando  $u$  e  $w$ . (O caso em que  $u = v$  ou  $v = w$  é trivial.)

Desta forma, esta relação particiona o conjunto de vértices de  $G$  em conjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_k$ . Cada um dos subgrafos induzidos  $G[V_i]$ ,  $i = 1, \dots, k$  é chamado de uma **componente conexa** de  $G$ .

- **Isomorfismo:** Um **isomorfismo** entre dois grafos  $G$  e  $H$  é uma bijeção  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que dois vértices  $v$  e  $w$  são adjacentes em  $G$  se e somente se  $f(v)$  e  $f(w)$  são adjacentes em  $H$ . Quando existe um isomorfismo entre  $G$  e  $H$ , dizemos que

$G$  e  $H$  são grafos isomorfos. De uma maneira intuitiva, dois grafos são isomorfos se podemos reposicionar os vértices de um deles, sem retirar ou adicionar arestas, de forma que os dois grafos coincidam. Por exemplo, na Figura 20 os grafos são isomorfos:

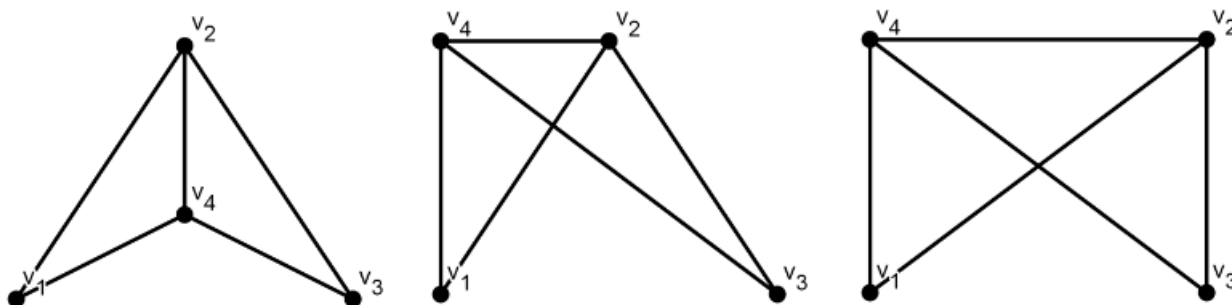
Figura 20 – Grafo  $G$ , à esquerda, isomorfo ao Grafo  $H$ , à direita.



Fonte: A autora.

O isomorfismo entre os grafos acima é aquele que leva  $v_i$  em  $w_i$ . Observe que poderíamos fazer mudanças nas posições dos vértices do grafo à esquerda para que ele fique como o da direita: primeiro “levamos”  $v_4$  em uma posição acima de  $v_1$ , depois levamos  $v_2$  para uma posição acima de  $v_3$  e por fim diminuimos a largura da figura, como vemos na sequência da Figura 21:

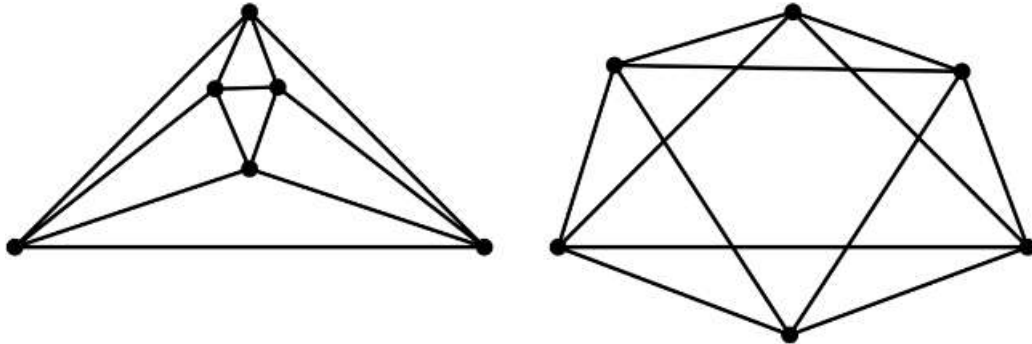
Figura 21 – Transformação isomorfa do Grafo  $G$  no Grafo  $H$ .



Fonte: A autora.

Da mesma forma, os grafos na Figura 22 também são isomorfos.

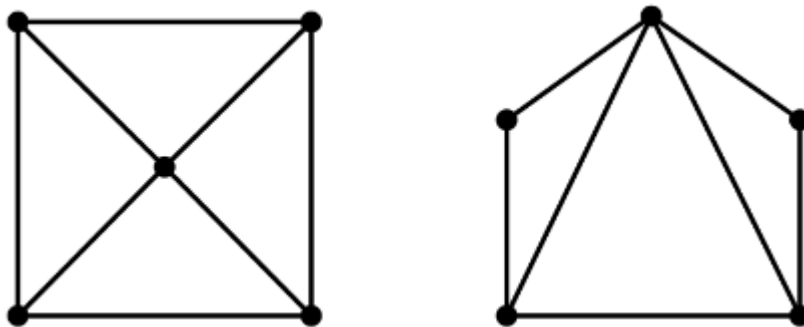
Figura 22 – Grafos isomorfos.



Fonte: A autora.

Por outro lado, os grafos exibidos na Figura 23 não são isomorfos. Observe que no grafo à esquerda todos os vértices têm grau maior ou igual a 3, ao passo que no grafo à direita temos vértices com grau 2. Como o isomorfismo necessariamente preserva o grau dos vértices, tais grafos não são isomorfos.

Figura 23 – Grafos não isomorfos.



Fonte: A autora.

## 2.2 Uma aplicação: O problema do menor caminho

Suponha que à cada aresta  $a$  de um grafo  $G = (V, A)$  está associado um número real não-negativo  $w(a)$ , que será chamado de **peso** da aresta. Neste caso, dizemos que  $G$  é um grafo *valorado*. Se  $H$  é um subgrafo de um grafo valorado, o peso de  $H$  é a soma dos pesos das arestas de  $H$ . Muitos problemas de otimização são equivalentes a determinar um certo tipo de subgrafo de um grafo valorado com peso mínimo (ou máximo). Um destes problemas é o problema do menor caminho: dada uma coleção de cidades conectadas por algumas estradas, determinar a rota mais curta entre duas cidades específicas. Neste caso, cada estrada conectando duas cidades é uma aresta e seu peso é o seu comprimento.

Estamos interessados em encontrar um caminho de peso mínimo conectando as duas cidades. Iremos nos referir ao peso de um caminho como seu comprimento e o peso mínimo de um  $(u, v)$ -caminho será chamado de distância entre  $u$  e  $v$ , denotado por  $d(u, v)$ . Adotaremos a convenção de que se  $\{u, v\}$  não é uma aresta de  $G$  então  $w(\{u, v\}) = \infty$ .

O algoritmo descrito aqui foi descoberto por Dijkstra (1959) e, independentemente, por Whiting e Hillier (1960). Ele descreve não apenas o  $(u_0, v_0)$ -caminho mais curto, mas também o caminho mais curto entre  $u_0$  e todos os vértices de  $G$ . A ideia básica é a seguinte.

Suponha que  $S$  é um subconjunto próprio de  $V$  tal que  $u_0 \in S$  e denote por  $\bar{S}$  seu complementar em  $V$ . Se  $P = u_0 \dots \bar{u}\bar{v}$  é um caminho mais curto de  $u_0$  até  $\bar{S}$ , então  $\bar{u} \in S$  e a seção  $(u_0, \bar{u})$  de  $P$  é necessariamente um  $(u_0, \bar{u})$ -caminho mais curto. Portanto,

$$d(u_0, \bar{v}) = d(u_0, \bar{u}) + w(\bar{u}\bar{v})$$

e a distância de  $u_0$  até  $\bar{S}$  é dada pela fórmula

$$d(u_0, \bar{S}) = \min_{u \in S, v \in \bar{S}} \{d(u_0, u) + w(u, v)\}.$$

Começando com o conjunto  $S_0 = \{u_0\}$  é construída uma sequência  $S_0, S_1, \dots, S_k$  de subconjuntos de  $V$  de tal maneira que, ao final do estágio  $i$ , caminhos mais curtos de  $u_0$  até todos os vértices de  $S_i$  são conhecidos. A primeira etapa é encontrar o vértice mais próximo de  $u_0$ . Isto é feito calculando  $d(u_0, \bar{S}_0)$  e selecionando um vértice  $u_1 \in \bar{S}_0$  tal que  $d(u_0, u_1) = d(u_0, \bar{S}_0)$ . Pela fórmula anterior, temos que

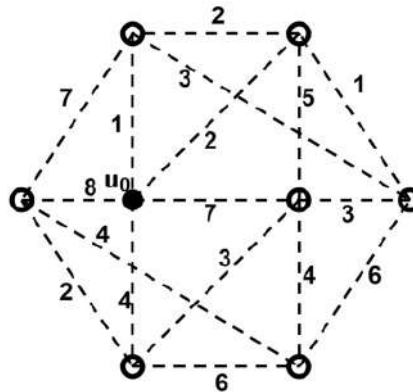
$$d(u_0, \bar{S}_0) = \min_{u \in S_0, v \in \bar{S}_0} \{d(u_0, u) + w(u, v)\} = \min_{v \in \bar{S}_0} w(u_0, v).$$

Definindo  $S_1 = \{u_0, u_1\}$  e considerando o caminho  $u_0u_1$ , temos claramente o  $(u_0, u_1)$ -caminho mais curto. Em geral, se o conjunto  $S_k = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$  e os correspondentes caminhos mais curtos  $P_1, \dots, P_k$  já foram determinados, calculamos  $d(u_0, \bar{S}_k)$  usando a fórmula anterior e escolhemos um vértice  $u_{k+1} \in \bar{S}_k$  tal que  $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, \bar{S}_k)$ . Temos que

$$d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, u_j) + w(u_j, u_{k+1})$$

para algum  $j \leq k$ . Obtemos então um  $(u_0, u_{k+1})$ -caminho mais curto juntando a aresta  $u_ju_{k+1}$  ao caminho  $P_j$ . Na verdade, o algoritmo de Dijkstra é um refinamento do procedimento descrito, que evita fazer muitas comparações desnecessárias. Antes de vermos tal refinamento, vamos ver um exemplo particular para compreender melhor o procedimento que acabamos de descrever. Considere o grafo abaixo, onde  $u_0$  é o ponto preto cheio e o peso de cada aresta é o número representado o mais próximo dela:

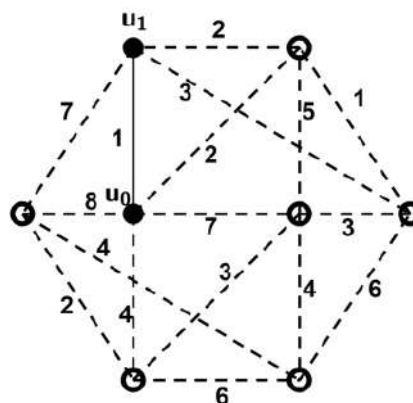
Figura 24 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra.



Fonte: A autora.

Determinamos agora o vértice mais próximo de  $u_0$ , que será chamado de  $u_1$ , bem como o caminho  $u_0u_1$ . Destacamos o ponto  $u_1$  em ponto cheio e o caminho  $u_0u_1$  em linha cheia:

Figura 25 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra.



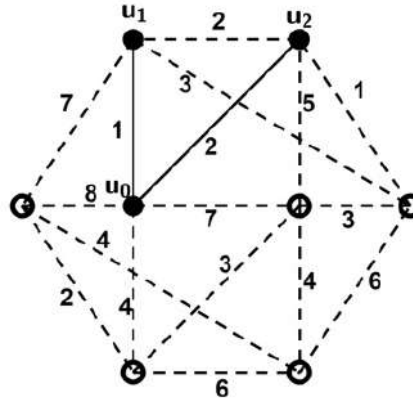
Fonte: A autora.

Tendo o conjunto  $S_1 = \{u_0, u_1\}$ , temos

$$d(u_0, \bar{S}_1) = \min_{u \in S_1, v \in \bar{S}_1} \{d(u_0, u) + w(u, v)\} = \min\{0+2, 0+7, 0+4, 0+8, 1+2, 1+7, 1+3\} = 2.$$

Nas somas anteriores, as parcelas iguais a zero surgem quanto tomamos  $u = u_0$ . Tomamos então um vértice  $u_2$  tal que  $d(u_0, \bar{S}_1) = d(u_0, u_2)$ , destacado na Figura 26:

Figura 26 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra.



Fonte: A autora.

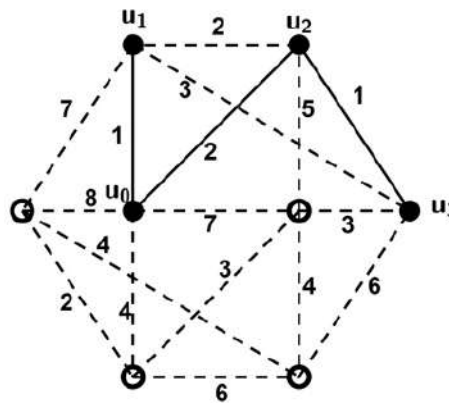
Temos agora o conjunto  $S_2 = \{u_0, u_1, u_2\}$  e os caminhos de comprimento mínimo  $P_1 = u_0u_1$  e  $P_2 = u_0u_2$  entre  $u_0$  e os vértices em  $S_2$ . Além disso,

$$d(u_0, \bar{S}_2) = \min_{u \in S_2, v \in \bar{S}_2} \{d(u_0, u) + w(u, v)\} =$$

$$\min\{0 + 7, 0 + 4, 0 + 8, 1 + 7, 1 + 3, 2 + 1, 2 + 5\} = 3.$$

Escolhemos o vértice  $u_3$  tal que  $d(u_0, \bar{S}_2) = d(u_0, u_3)$ , destacado na Figura 27:

Figura 27 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra.



Fonte: A autora.

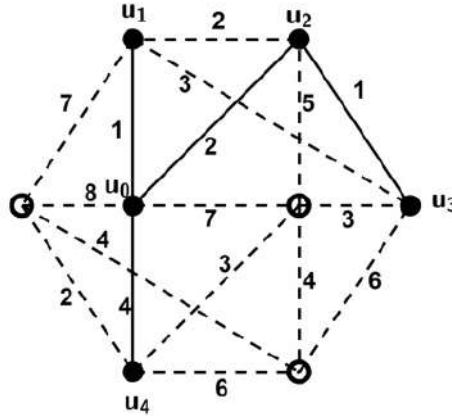
Temos assim o conjunto  $S_3 = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ , com caminhos de menor comprimento  $P_1 = u_0u_1$ ,  $P_2 = u_0u_2$  e  $P_3 = u_0u_2u_3$ . Agora,

$$d(u_0, \bar{S}_3) = \min_{u \in S_3, v \in \bar{S}_3} \{d(u_0, u) + w(u, v)\} =$$

$$\min\{0 + 7, 0 + 4, 0 + 8, 1 + 7, 2 + 5, 3 + 6, 3 + 3\} = 4.$$

Tomamos um vértice  $u_4$  tal que  $d(u_0, \bar{S}_3) = d(u_0, u_4)$ , obtendo a Figura 28:

Figura 28 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra.



Fonte: A autora.

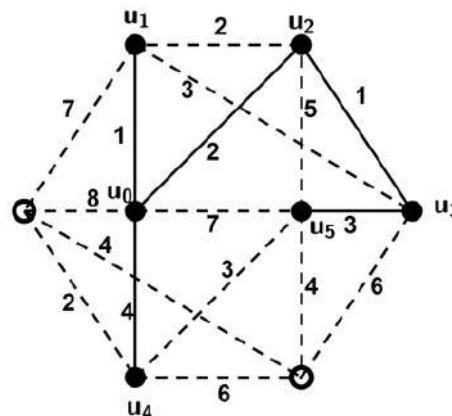
Obtemos o conjunto  $S_4 = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ , com caminhos de menor comprimento  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4 = u_0u_4$ . Além disso,

$$d(u_0, \bar{S}_4) = \min_{u \in S_4, v \in \bar{S}_4} \{d(u_0, u) + w(u, v)\} =$$

$$\min\{0 + 7, 0 + 8, 1 + 7, 2 + 5, 3 + 3, 3 + 6, 4 + 6, 4 + 3, 4 + 2\} = 6.$$

Observe que agora temos duas possíveis escolhas de  $u_5$  tais que  $d(u_0, u_5) = 6$ . Tomamos  $u_5$  como na Figura 29 ,

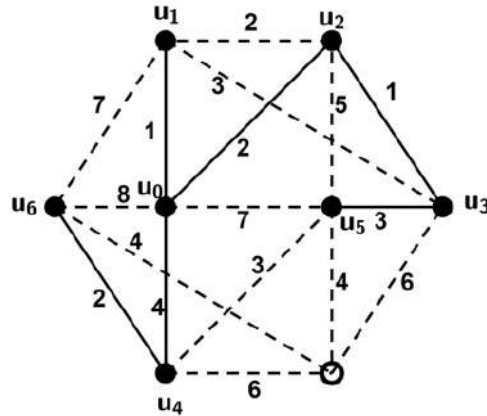
Figura 29 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra.



Fonte: A autora.

escolhendo  $u_6$  como sendo a outra possível escolha:

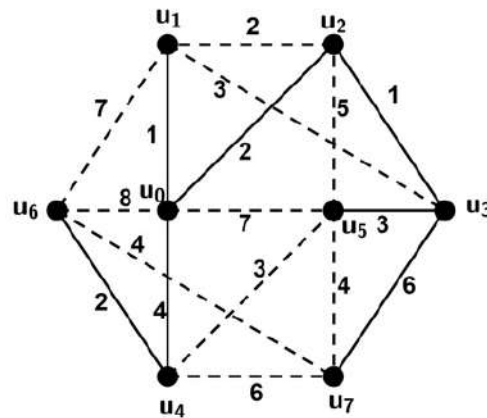
Figura 30 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra.



Fonte: A autora.

Desta forma, chegamos ao conjunto  $S_6 = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ , com caminhos de comprimento mínimo  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 = u_0u_2u_3u_5$  e  $P_6 = u_0u_4u_6$ . Como resta somente um vértice, temos que  $u_7$  já está determinado. Olhando a Figura 30, vemos que o  $(u_0, u_7)$ -caminho de comprimento mínimo é  $P_7 = u_0u_2u_3u_7$ :

Figura 31 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra.



Fonte: A autora.

Voltamos agora ao algoritmo de Dijkstra: para evitar repetições de comparações desnecessárias, cada vértice  $v$  carrega um rótulo  $l(v)$  o qual é um limitante superior para  $d(u_0, v)$ . Inicialmente,  $l(u_0) = 0$  e  $l(v) = \infty$  para  $v \neq u_0$ . Conforme o algoritmo avança, estes rótulos são modificados de tal forma que no final do estágio  $i$

$$l(u) = d(u_0, u) \quad \text{para} \quad u \in S_i$$



e

$$l(v) = \min_{u \in S_{i-1}} \{d(u_0, u) + w(u, v)\} \quad \text{para } v \in \bar{S}_i.$$

Temos o seguinte algoritmo

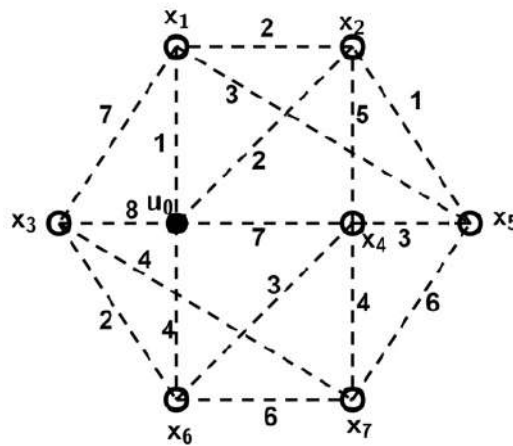
### Algoritmo de Dijkstra

1. Ponha  $l(u_0) = 0$ ,  $l(v) = \infty$  para  $v \neq u_0$ ,  $S_0 = \{u_0\}$  e  $i = 0$ .
2. Para cada  $v \in \bar{S}_i$ , substitua  $l(v)$  por  $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_i, v)\}$ . Calcule  $\min_{v \in \bar{S}_i} \{l(v)\}$  e denote por  $u_{i+1}$  um vértice para o qual este mínimo é atingido. Coloque  $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$ .
3. Se  $i = |V| - 1$  pare. Se  $i < |V| - 1$ , substitua  $i$  por  $i + 1$  e vá para a etapa 2.

Quando o algoritmo termina, a distância de  $u_0$  até  $v$  é dada pelo valor do rótulo  $l(v)$ . Se estamos interessados em determinar a distância entre  $u_0$  e um vértice específico  $v_0$ , paramos quando algum  $u_j$  é igual a  $v_0$ .

Vamos exemplificar a execução deste algoritmo para o exemplo resolvido anteriormente. Para isto, vamos renomear os demais vértices por  $x_1, \dots, x_7$  como na Figura 32:

Figura 32 – Ilustração do algoritmo de Dijkstra.



Fonte: A autora.

- $l(u_0) = 0$ ,  $l(x_j) = \infty$ ,  $j = 1 \dots 7$ ,  $S_0 = \{u_0\}$ ,  $i = 0$ .
- $l(x_1) = 1$ ,  $l(x_2) = 2$ ,  $l(x_3) = 8$ ,  $l(x_4) = 7$ ,  $l(x_5) = \infty$ ,  $l(x_6) = 4$ ,  $l(x_7) = \infty$ . Temos  $u_1 = x_1$ ,  $l(u_1) = 1$ ,  $S_1 = \{u_0, u_1\}$ .
- $i = 1$ ,  $l(x_2) = \min\{2, 1 + 2\} = 2$ ,  $l(x_3) = \min\{8, 1 + 7\} = 8$ ,  $l(x_4) = \min\{7, 1 + \infty\} = 7$ ,  $l(x_5) = \min\{\infty, 1 + 3\} = 4$ ,  $l(x_6) = \min\{4, 1 + \infty\} = 4$ ,  $l(x_7) = \min\{\infty, 1 + \infty\} = \infty$ . Temos  $u_2 = x_2$ ,  $l(u_2) = 2$ ,  $S_2 = \{u_0, u_1, u_2\}$ .

- $i = 2$ ,  $l(x_3) = \min\{8, 2 + \infty\} = 8$ ,  $l(x_4) = \min\{7, 2 + 5\} = 7$ ,  $l(x_5) = \min\{4, 2 + 1\} = 3$ ,  
 $l(x_6) = \min\{4, 2 + \infty\} = 4$ ,  $l(x_7) = \min\{\infty, 2 + \infty\} = \infty$ . Temos  $u_3 = x_5$ ,  $l(u_3) = 3$ ,  
 $S_3 = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ .
- $i = 3$ ,  $l(x_3) = \min\{8, 3 + \infty\} = 8$ ,  $l(x_4) = \min\{7, 3 + 3\} = 6$ ,  $l(x_6) = \min\{4, 3 + \infty\} =$   
 $4$ ,  $l(x_7) = \min\{\infty, 3 + 6\} = 9$ . Temos  $u_4 = x_6$ ,  $l(u_4) = 4$ ,  $S_4 = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ .
- $i = 4$ ,  $l(x_3) = \min\{8, 4 + 2\} = 6$ ,  $l(x_4) = \min\{6, 4 + 3\} = 6$ ,  $l(x_7) = \min\{9, 4 + 6\} = 9$ .  
 Escolhemos  $u_5 = x_4$  e assim temos  $l(u_5) = 6$ ,  $S_5 = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ .
- $i = 5$ ,  $l(x_3) = \min\{6, 6 + \infty\} = 6$ ,  $l(x_7) = \min\{9, 6 + 4\} = 9$ . Tomamos  $u_6 = x_3$ ,  
 $l(u_6) = 6$ ,  $S_6 = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ .
- $i = 6$ ,  $l(x_7) = \min\{9, 6 + 4\} = 9$ . Tomamos  $u_7 = x_7$ ,  $l(u_7) = 9$ ,  $S_7 = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ .
- $i = 7$ . Terminou.

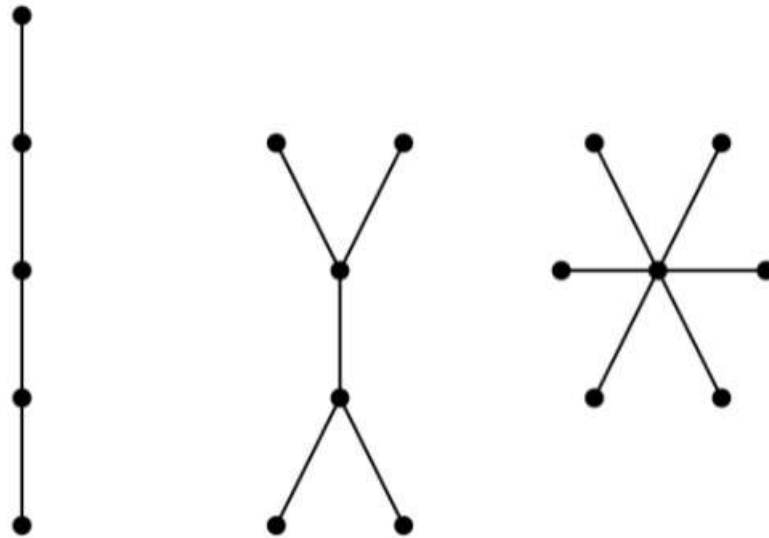
## 3 Alguns Tipos de Grafos e Aplicações

Este capítulo contém a parte principal desta dissertação. Aqui apresentamos três tipos de grafos que possuem uma grande gama de aplicações: as árvores, os grafos eulerianos e os grafos hamiltonianos. No final de cada seção apresentamos uma aplicação dada por problemas clássicos da teoria dos grafos, juntamente com um algoritmo ou uma estratégia para resolver o problema. As definições e resultados aqui apresentados seguem os livros (BONDY; MURTY, 1976) e (JURKIEWICZ, 2009), enquanto que os algoritmos apresentados são todos de (BONDY; MURTY, 1976).

### 3.1 Árvores

Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos. Para um dado número  $n$  de vértices, um grafo conexo com o menor número de arestas possível é uma árvore. Na Figura 33 exibimos três exemplos de árvores.

Figura 33 – Alguns exemplos de árvores.



Fonte: A autora.

O teorema 3.1 fornece várias caracterizações alternativas para uma árvore. Em seu enunciado precisamos do conceito de ponte: Uma **ponte** em um grafo  $G$  é uma aresta que se removida aumenta o número de componentes conexas de  $G$ . Em particular, se removermos uma ponte de um grafo conexo ele deixa de ser conexo.

**Teorema 3.1.** *Seja  $T$  um grafo conexo com  $n$  vértices. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1.  $T$  é uma árvore.
2.  $T$  não contém ciclos e tem  $n - 1$  arestas.
3.  $T$  é conexo e tem  $n - 1$  arestas.
4.  $T$  é conexo e toda aresta é uma ponte.
5. Todo par de vértices de  $T$  é ligado por um único caminho.
6.  $T$  não contém ciclos, mas a adição de uma aresta produz um ciclo único.

**Demonstração:** (1)  $\Rightarrow$  (2) : Por definição, se  $T$  é uma árvore então  $T$  não contém ciclos. Vamos mostrar a afirmação sobre o número de arestas por indução. O resultado é trivial para  $n = 1$ . Suponha o resultado válido para toda árvore com menos de  $n$  vértices. Como  $T$  não contém ciclos, a retirada de uma aresta qualquer deixa o grafo desconexo, dividindo-o em duas árvores  $T_1$  e  $T_2$  com  $n_1$  e  $n_2$  vértices, respectivamente. Temos  $n_1 + n_2 = n$  e  $n_1, n_2 < n$ . Pela hipótese de indução,  $T_1$  tem  $n_1 - 1$  arestas e  $T_2$  tem  $n_2 - 1$  arestas. Logo,  $T$  possui  $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$  arestas.

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Suponha que  $T$  não contenha ciclos, tenha  $n - 1$  arestas mas seja desconexo. Então cada componente conexa  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ( $k > 1$ ) de  $T$  é uma árvore. Se  $n_i$  é o número de vértices em cada componente conexa, então  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  e, como cada componente conexa é uma árvore, o número de arestas na componente  $T_i$  é  $n_i - 1$ . Logo, o número total de arestas de  $T$  é  $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = n - k < n - 1$ , contrariando a hipótese. Logo,  $T$  é conexo.

(3)  $\Rightarrow$  (4) : Como  $n - 1$  é o menor número das arestas para que um grafo com  $n$  vértices seja conexo, segue que a retirada de qualquer aresta torna o grafo desconexo. Logo, toda aresta é uma ponte.

(4)  $\Rightarrow$  (5) : Se houvesse mais de um caminho ligando dois vértices, o grafo teria um ciclo. A retirada de uma aresta de um grafo não o torna desconexo. Logo, o grafo teria uma aresta que não é ponte.

(5)  $\Rightarrow$  (6) : Suponha que todo par de vértices é ligado por um único caminho. Se  $T$  tivesse um ciclo, então haveria um par de vértices ligados por mais de um caminho, contrariando a hipótese. Além disso, a adição de uma aresta, digamos ligando os vértices  $v_1$  e  $v_2$ , concatenada com um caminho de  $v_2$  para  $v_1$ , forma um ciclo começando (e terminando) em  $v_1$ . Tal ciclo é único, pois caso contrário a retirada da aresta  $(v_1, v_2)$  deixaria dois caminhos distintos ligando  $v_1$  e  $v_2$ .

(6)  $\Rightarrow$  (1) : Assumindo (6) já temos que  $T$  não possui ciclos. Assim, para provar que  $T$  é uma árvore basta mostrar que  $T$  é conexo. Suponha que isso não ocorra e sejam  $v_1$  e  $v_2$  vértices que não estão ligados por nenhum caminho. Então a introdução da aresta  $(v_1, v_2)$  não produz um ciclo (se produzisse, existiria um caminho, diferente da aresta  $(v_1, v_2)$ , ligando esses vértices). Logo,  $T$  é conexo.  $\square$

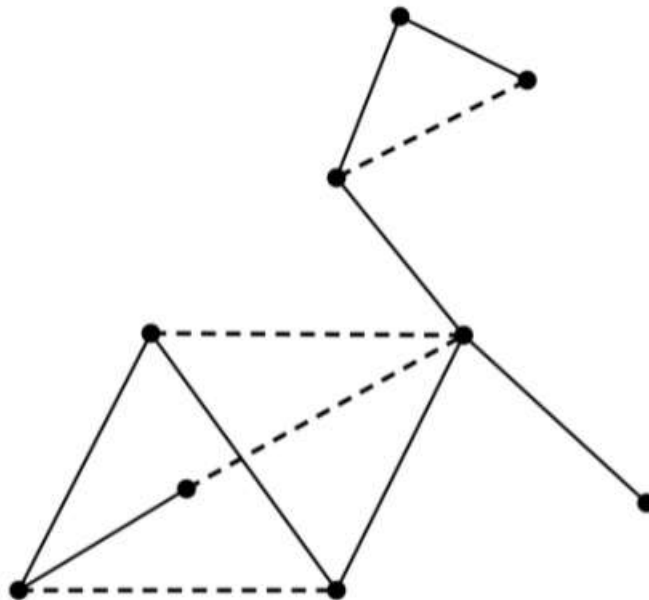
Uma **árvore geradora** de um grafo conexo  $G$  é um subgrafo gerador de  $G$  que é uma árvore. Como uma consequência do resultado anterior, temos que todo grafo conexo possui uma árvore geradora.

**Corolário 3.1.** *Se  $G$  é um grafo conexo, então  $G$  possui uma árvore geradora.*

**Demonstração:** Tome um subgrafo gerador  $T$  conexo minimal de  $G$ , no sentido em que  $T$  é conexo e que a remoção de uma aresta de  $T$  o torna desconexo. Isso significa que toda aresta de  $T$  é uma ponte e, pelo teorema anterior,  $T$  é uma árvore.  $\square$

Na Figura 34 temos um grafo e sua árvore geradora. As arestas da árvore geradora estão representadas em linha cheia, enquanto que as arestas do grafo são as em linha cheia ou tracejadas.

Figura 34 – Um grafo e sua árvore geradora.



Fonte: A autora.

### 3.1.1 Uma aplicação: O Problema da Conexão

Suponha que se deseja construir uma rede de trens conectando um certo número de cidades. Dado o custo  $c_{i,j}$  para construir uma ligação direta entre as cidades  $v_i$  e  $v_j$ , queremos construir a rede de tal forma que o custo da construção seja o mínimo. Este é conhecido como o **problema da conexão**.

Como na Seção 2.2, esse problema pode ser posto em termos de grafos valorados: Dado um grafo conexo valorado  $G$ , com pesos  $w(v_i v_j) = c_{i,j}$ , queremos encontrar um subgrafo gerador conexo de peso mínimo. Além disso, como os pesos representam custos, eles são não negativos e, conseqüentemente, podemos assumir que tal subgrafo gerador é uma árvore geradora, pois do contrário podemos retirar arestas de forma eliminar ciclos, diminuindo o custo total. Tal árvore será chamada de **árvore ótima**. Um algoritmo relativamente simples para encontrar esta árvore geradora foi estabelecido por Kruskal em 1956. Vamos inicialmente considerar o caso em que cada peso tem o mesmo valor  $w(e) = 1$ . Uma vez que toda árvore geradora possui o mesmo número de arestas, nesse caso especial precisamos simplesmente encontrar uma tal árvore. Um algoritmo indutivo simples para isso é o seguinte:

1. Escolha uma aresta  $a_1$ .
2. Se arestas  $a_1, a_2, \dots, a_i$  foram escolhidas, então escolha  $a_{i+1}$  em  $A \setminus \{a_1, \dots, a_i\}$  de tal maneira que  $G[\{e_1, \dots, e_i, e_{i+1}\}]$  não contém ciclos.
3. Pare quando a etapa 2 não puder ser mais implementada.

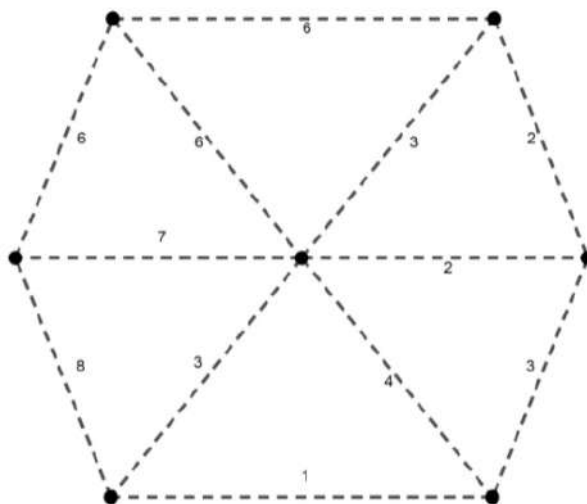
Pelo item (6) do Teorema 3.1 e pelo Corolário 34, esse algoritmo fornece uma árvore geradora. O **Algoritmo de Kruskal** segue uma ideia parecida, e funciona para grafos com pesos arbitrários:

#### Algoritmo de Kruskal

1. Escolha uma aresta  $a_1$  tal que  $w(a_1)$  é o menor possível.
2. Se arestas  $a_1, a_2, \dots, a_i$  foram escolhidas, escolha  $a_{i+1}$  em  $A \setminus \{a_1, \dots, a_i\}$  tal que
  - a)  $G[\{a_1, \dots, a_i, a_{i+1}\}]$  não contém ciclos.
  - b)  $w(a_{i+1})$  é o menor possível satisfazendo (a).
3. Pare quando a etapa 2 não puder mais ser implementada.

É possível, embora não faremos aqui, provar que ao algoritmo de Kruskal fornece sempre uma árvore geradora de peso mínimo. Vejamos um exemplo. Considere o grafo ilustrado na Figura 35:

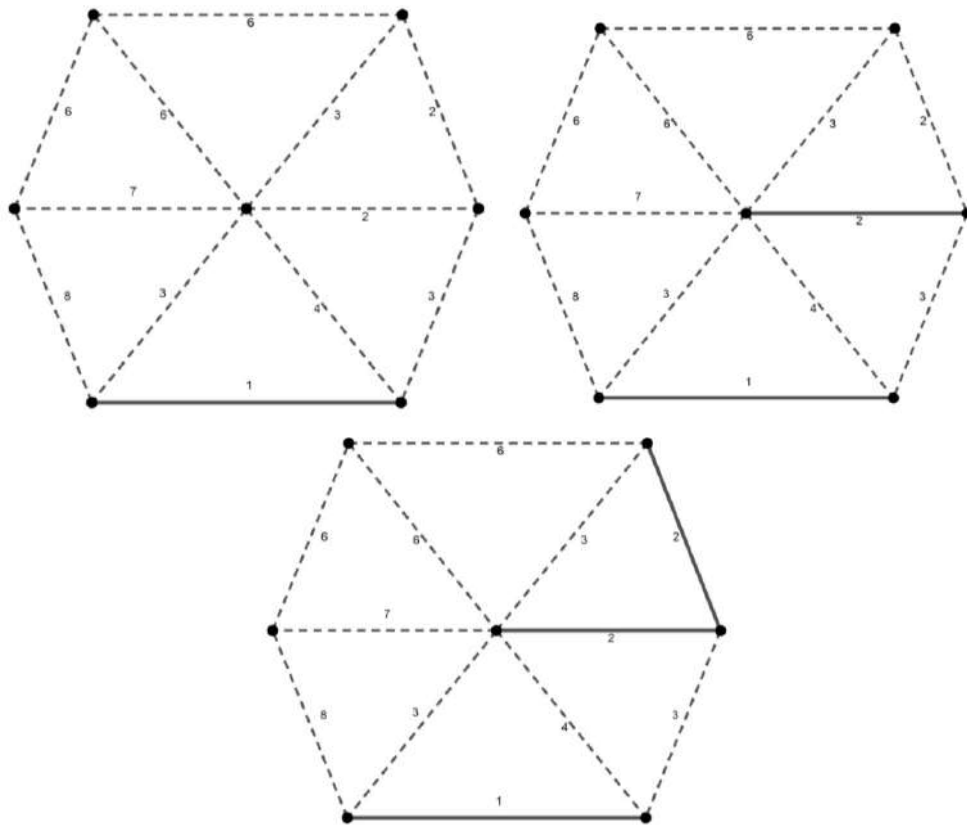
Figura 35 – Um grafo valorado.



Fonte: A autora.

Vamos aplicar o algoritmo de Kruskal para encontrar uma árvore geradora de peso mínimo. Nas ilustrações a seguir, cada vez que uma aresta é escolhida ela é representada com uma linha cheia e mais grossa. Começamos escolhendo a aresta de peso 1, localizada na parte inferior. Depois disso, escolhemos uma das arestas de peso 2. A próxima escolha é novamente uma aresta de peso 2.

Figura 36 – Etapas iniciais do algoritmo de Kruskal.

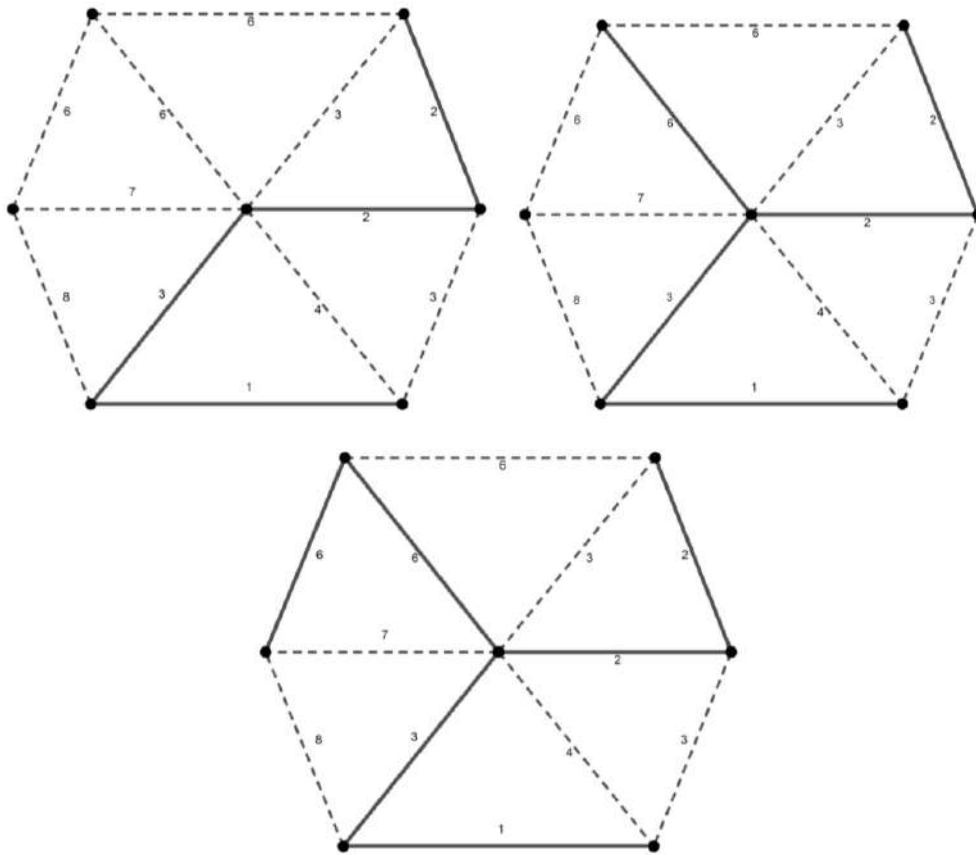


Fonte: A autora.

A próxima escolha é uma aresta de peso 3. Observe que a aresta localizada no interior do polígono, na parte superior, não pode ser escolhida agora pois teríamos um ciclo. Podemos escolher qualquer uma das outras de peso 3. Escolhemos a localizada no interior do polígono, na parte inferior. Feita esta escolha, a próxima a ser escolhida não pode ser nem a de peso 3 restante, nem a de peso 4, pois assim teríamos um ciclo. Escolhemos então uma das arestas de peso 6, aquela localizada no interior do polígono. A próxima escolha é uma aresta de peso 6 que não forme um ciclo, localizada na parte esquerda do polígono:



Figura 37 – Etapas finais do algoritmo de Kruskal.

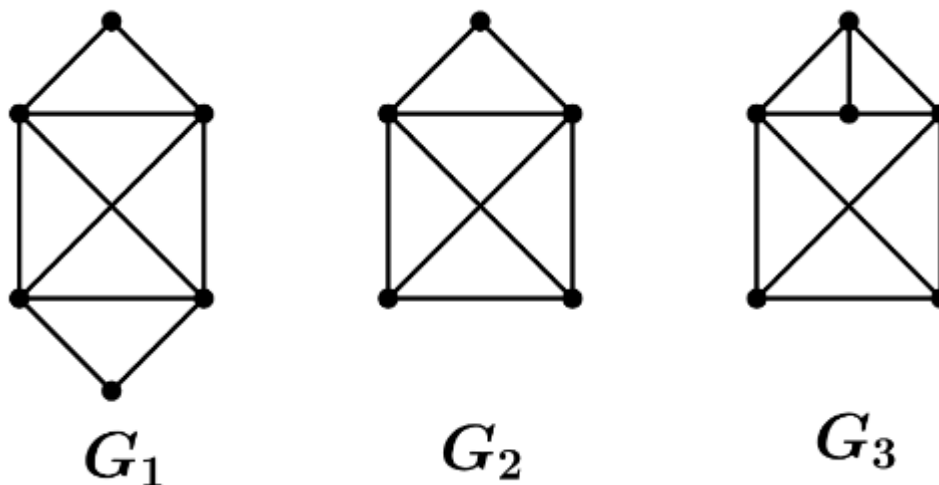


Fonte: A autora.

Como a introdução de qualquer nova aresta criaria um ciclo, o algoritmo para e encontramos a árvore geradora procurada.

## 3.2 Grafos Eulerianos

Um grafo conexo  $G$  com  $m$  arestas é dito **euleriano** quando é possível percorrê-lo inteiramente sem passar mais de uma vez sobre cada aresta e voltar ao ponto inicial, isto é, se existe uma trilha fechada de comprimento  $m$ . Se o grafo não é euleriano mas tem uma trilha *aberta* de comprimento  $m$  ele é dito **semieuleriano**. Um grafo semieuleriano pode ser percorrido completamente sem passar mais de uma vez sobre cada aresta, mas terminamos num ponto distinto do ponto inicial. Na Figura 38,  $G_1$  é euleriano,  $G_2$  é semieuleriano e  $G_3$  não é nem euleriano nem semieuleriano.

Figura 38 –  $G_1$  é euleriano,  $G_2$  é semieuleriano e  $G_3$  não é nem euleriano nem semieuleriano.

Fonte: A autora.

É fácil perceber que em um grafo euleriano todos os vértices devem ter grau par: como percorremos o grafo sem repetir arestas, toda vez que “chegamos” em um vértice precisamos “sair” por uma aresta diferente da usada para chegar nele. Um fato notável é que esta condição sobre a paridade é suficiente para caracterizar grafos eulerianos, conforme veremos no próximo teorema. Para isto, precisamos do seguinte resultado auxiliar.

**Lema 3.1.** *Se todo vértice de um grafo tem grau maior ou igual a 2, então o grafo contém um circuito.*

**Demonstração:** A partir de um vértice qualquer, iniciamos uma trilha. Como todo vértice tem grau maior ou igual a 2, sempre que “chegamos” em um vértice é possível sair dele, continuando a trilha. Quando chegamos em um vértice qualquer, ou estamos visitando ele pela primeira vez, e continuamos a trilha, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um circuito. Como o número de vértices é finito, o lema está demonstrado.  $\square$

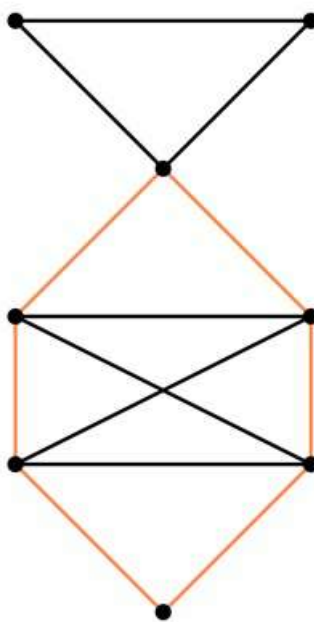
**Teorema 3.2.** *(Euler) Um grafo conexo  $G$  é euleriano se, e somente se, todos os vértices tem grau par.*

**Demonstração:**

Suponha que o grafo tenha uma trilha fechada de comprimento  $m$ . Cada vez que a trilha passa por um vértice, utiliza duas arestas, uma para entrar e uma para sair. Logo, o grau de cada vértice é par. Reciprocamente, suponha que todos os vértices tenham grau par. Vamos usar indução sobre  $m$ . Se  $m = 0$  o teorema é válido. Suponha que o resultado seja válido para todos os grafos com menos de  $m$  arestas. Como  $G$  é conexo, todos os

vértices tem grau maior ou igual a 2. Logo, pelo lema anterior,  $G$  contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todas as trilhas fechadas possíveis, escolhemos uma trilha  $T$  de comprimento máximo. Se o comprimento da trilha é  $m$ , o resultado está provado. Caso contrário, consideramos o grafo  $H$  obtido a partir de  $G$  retirando as arestas de  $T$ . Como ilustração, suponha que as arestas em vermelho no grafo abaixo formem uma trilha de comprimento máximo.

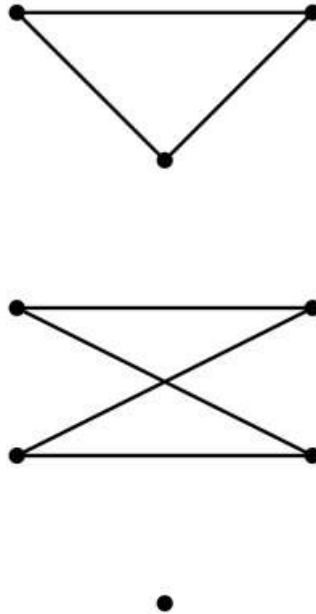
Figura 39 – Ilustração da demonstração.



Fonte: A autora.

Retirando as arestas em vermelho, obtemos o seguinte subgrafo:

Figura 40 – Ilustração da demonstração.



Fonte: A autora.

Como  $G$  é conexo, pelo menos uma das componentes conexas de  $H$  tem um vértice em comum com  $T$  (pois caso contrário, não conseguiríamos “sair” de  $T$ ). Além disso, como retiramos um número par de arestas de cada vértice de  $T$ , temos que todos os vértices de  $H$  são pares. Desta forma, pelo menos uma componente conexa de  $H$  tem um vértice em comum com  $T$  e todos os vértices de grau par. Pela hipótese de indução, nesta componente conexa existe uma trilha fechada passando por todos os vértices da componente. Concatenando essa trilha com  $T$ , obtemos uma trilha fechada com comprimento maior que o de  $T$ , contrariando a maximalidade na escolha de  $T$ .  $\square$

**Corolário 3.2.** *Um grafo conexo  $G$  é semieuleriano se, e somente se, possui exatamente dois vértices de grau ímpar.*

**Demonstração:** Se o grafo é semieuleriano, então existe uma trilha aberta começando em um vértice  $v$  e terminando em um vértice  $w$ . Desta forma,  $v$  e  $w$  serão os únicos vértices de grau ímpar, pois para todos os demais usamos uma aresta para “chegar” e outra para “sair”. Reciprocamente, suponha que o grafo possui exatamente dois vértices  $v$  e  $w$  de grau ímpar. Separamos em dois casos:

1. Se  $v$  e  $w$  estão conectados por uma aresta, então remova a aresta  $vw$ . Assim obtemos um grafo com todos os vértices de grau par, que é euleriano pelo teorema anterior. Neste novo grafo, construa uma trilha fechada contendo todas as arestas, começando

e terminando em  $v$ . Ao restituirmos a aresta  $v, w$  ao grafo e acrescentarmos essa aresta à trilha, obtemos uma trilha aberta começando em  $v$  e terminando em  $w$ .

2. Se  $v$  e  $w$  não estão conectados, introduza a aresta  $vw$ . Obtemos novamente um grafo euleriano, no qual construímos uma trilha fechada contendo todas as arestas. Ao retirarmos a aresta  $vw$  desta trilha, obtemos uma trilha aberta começando em  $w$  e terminando em  $v$ .

□

### 3.2.1 Uma aplicação: O Problema do Carteiro Chinês

Em seu trabalho, um carteiro retira cartas de um centro de distribuição, entrega elas e retorna ao centro de distribuição. Ele precisa passar por cada rua em sua região de atuação pelo menos uma vez. Sujeito a essa condição, ele deseja escolher sua rota de tal maneira que caminhe o mínimo possível. Este problema é conhecido como o problema do carteiro chinês, pois foi considerado pela primeira vez pelo matemático chinês Mei-Ku Kuan, em 1962.

Este problema pode ser formulado via teoria dos grafos da seguinte maneira: Definimos um **tour** em um grafo  $G$  como um passeio fechado que passa em cada aresta pelo menos uma vez. Dado um grafo valorado  $G$ , definimos o peso de um *tour*  $v_0 a_1 v_1 a_2 \dots a_n v_0$  como  $\sum_{i=1}^n w(a_i)$ . O problema do carteiro chinês consiste em encontrar um *tour* de peso mínimo em um grafo conexo valorado  $G$ . Um tal *tour* será chamado *tour* ótimo. Se  $G$  é euleriano, então ele possui uma trilha fechada passando por todos os vértices uma única vez e esta trilha será um *tour* ótimo. Podemos construir uma tal trilha utilizando o **Algoritmo de Fleury**. Para apresentar esse algoritmo, lembramos que uma ponte em um grafo é uma aresta que se removida aumenta o número de componentes conexas de  $G$ .

#### Algoritmo de Fleury

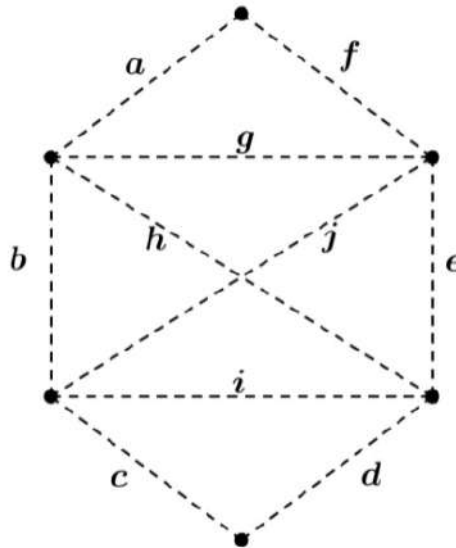
1. Escolha um vértice arbitrário  $v_0$  e fixe  $W_0 = v_0$ .
2. Suponha que uma trilha  $W_i = v_0 a_1 v_1 \dots a_i v_i$  foi escolhida. Então escolha uma aresta  $a_{i+1}$  em  $A \setminus \{a_1, \dots, a_i\}$  de tal maneira que:
  - a)  $a_{i+1}$  é incidente com  $v_i$ .
  - b) A menos que não exista alternativa,  $a_{i+1}$  não é uma ponte do subgrafo

$$G - \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$$

3. Pare quando a etapa 2 não puder ser mais implementada.

Veamos um exemplo. Como no caso de grafos eulerianos o objetivo é simplesmente construir uma trilha fechada passando por todos os vértices, não faz diferença se o grafo é valorado ou não. Por simplicidade, vamos considerar um grafo não valorado. Considere o grafo com arestas  $a, b, \dots, j$  representado na Figura 41.

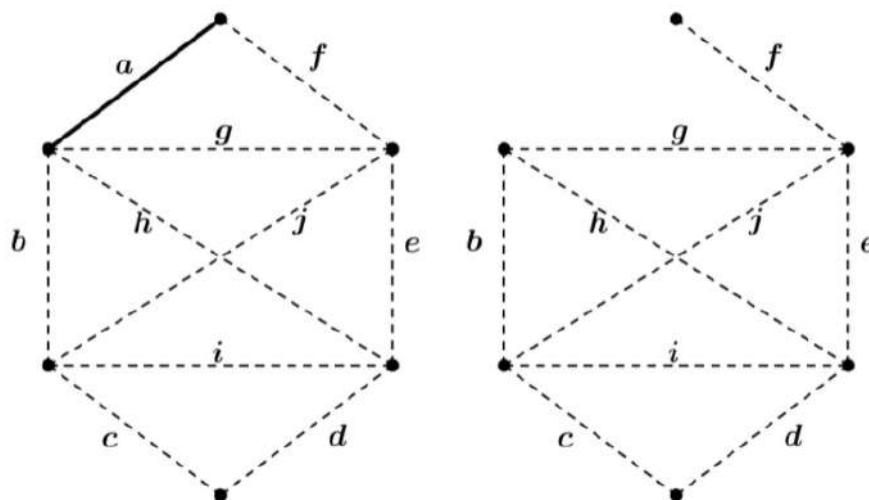
Figura 41 – Um grafo não valorado.



Fonte: A autora.

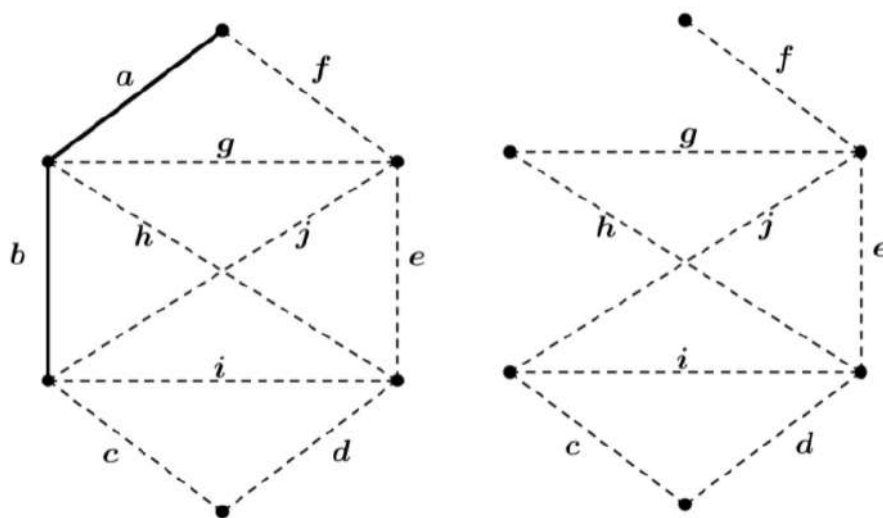
Na sequência de figuras a seguir, temos sempre à esquerda a trilha  $W_i$  escolhida, destacada em linha cheia, e à direita o subgrafo de  $G$  obtido removendo as arestas da trilha, que é crucial na escolha da próxima aresta. Começamos escolhendo  $v_0$  como o vértice na parte superior do polígono.

Figura 42 – Primeira etapa do algoritmo de Fleury.



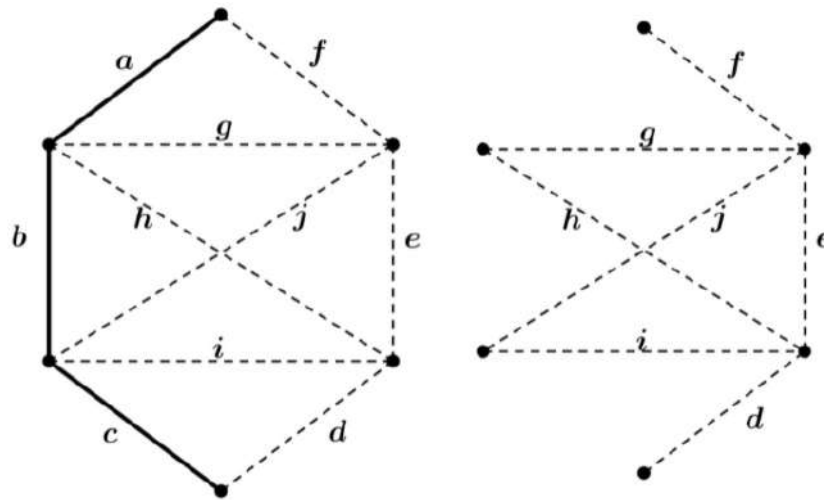
Fonte: A autora.

Figura 43 – Segunda etapa do algoritmo de Fleury.



Fonte: A autora.

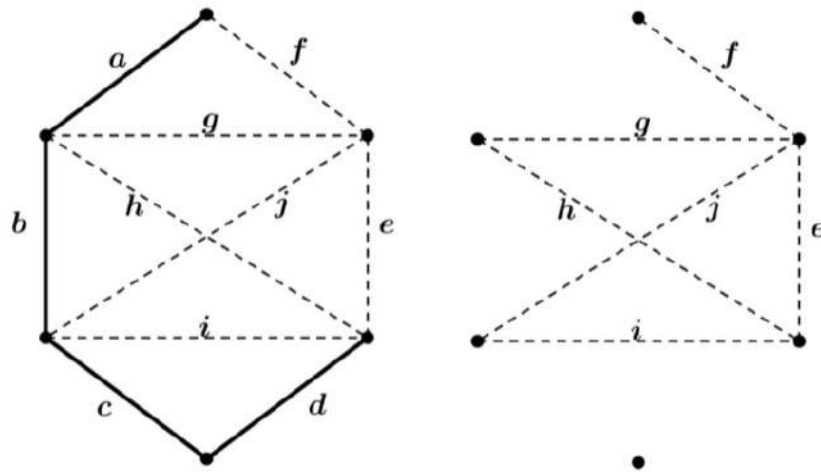
Figura 44 – Terceira etapa do algoritmo de Fleury.



Fonte: A autora.

Observe agora que  $d$  é uma ponte do subgrafo  $G - \{a, b, c\}$ . No entanto, como não há outra escolha possível, o algoritmo admite a escolha de  $d$ .

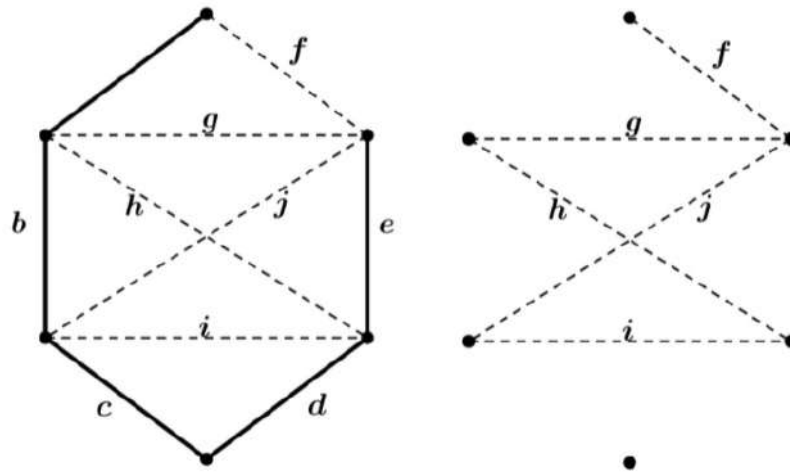
Figura 45 – Quarta etapa do algoritmo de Fleury.



Fonte: A autora.



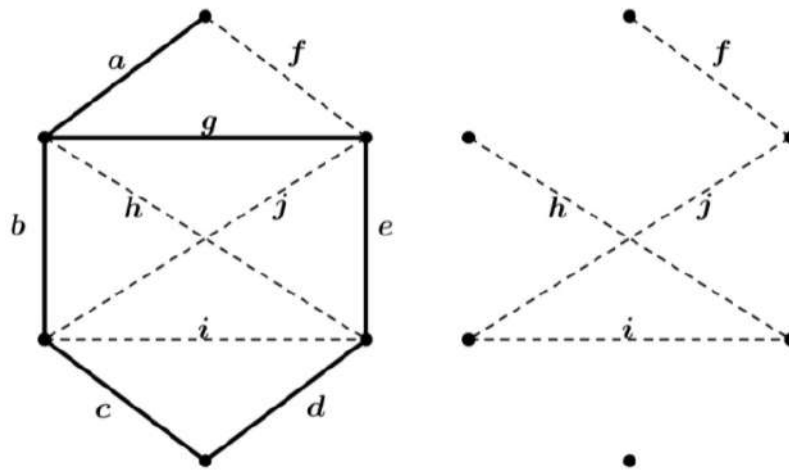
Figura 46 – Quinta etapa do algoritmo de Fleury.



Fonte: A autora.

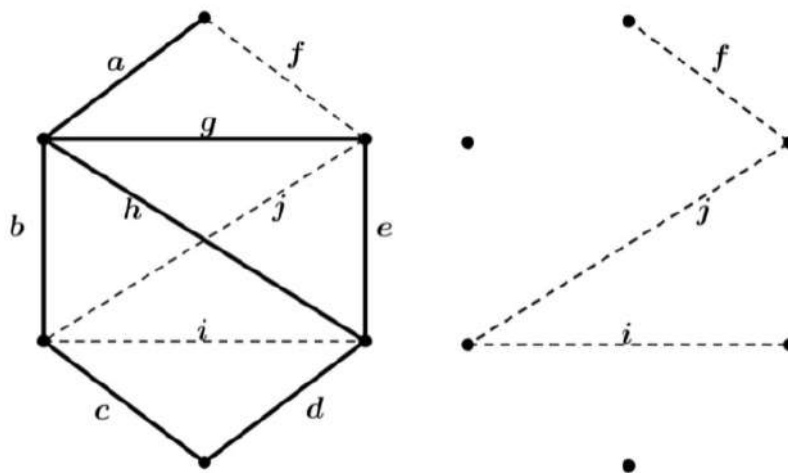
Agora,  $f$  é uma ponte no subgrafo  $G - \{a, b, c, d, e\}$ , mas temos outras opções de escolha, pois  $g$  e  $j$  não são pontes nesse subgrafo. Escolhemos  $g$ .

Figura 47 – Sexta etapa do algoritmo de Fleury.



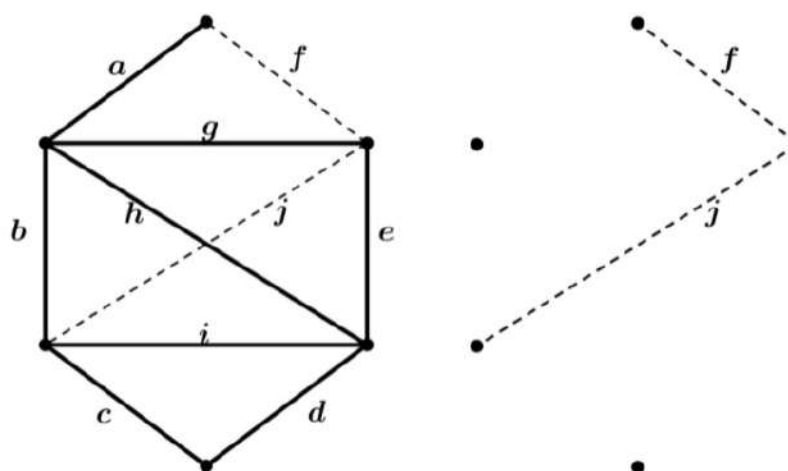
Fonte: A autora.

Figura 48 – Sétima etapa do algoritmo de Fleury.



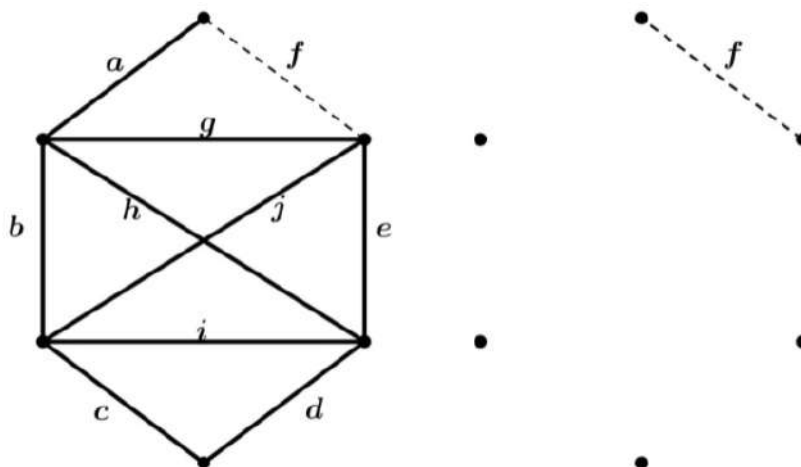
Fonte: A autora.

Figura 49 – Oitava etapa do algoritmo de Fleury.



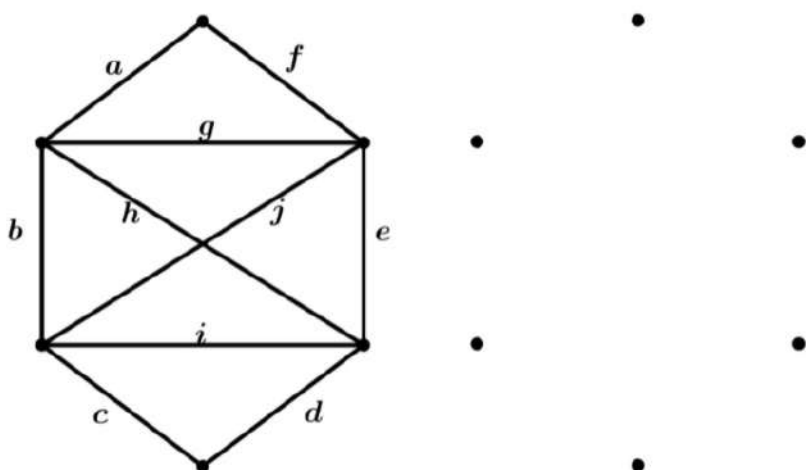
Fonte: A autora.

Figura 50 – Nona etapa do algoritmo de Fleury.



Fonte: A autora.

Figura 51 – Décima etapa do algoritmo de Fleury.



Fonte: A autora.

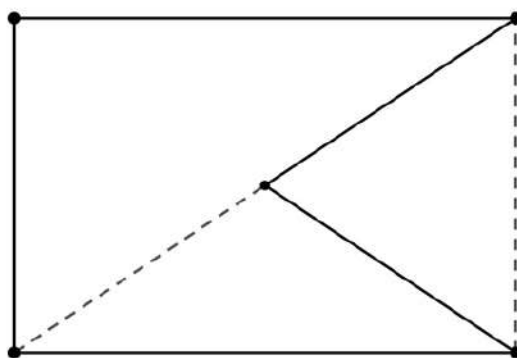
Não trataremos aqui o caso em que  $G$  não é euleriano, mas a ideia básica é a seguinte: dado o grafo valorado  $G$ , construa um novo grafo valorado  $G^*$  duplicando algumas arestas de  $G$ , de forma a obter um grafo euleriano tal que a soma dos pesos das arestas adicionadas seja a menor possível. Observe que nesse procedimento teremos pares de vértices ligados por mais de uma aresta e assim  $G^*$  não é um grafo simples. Existe um algoritmo, desenvolvido por Edmonds e Johnson em 1973 para obter  $G^*$ . Uma vez obtido  $G^*$ , o algoritmo de Fleury pode ser utilizado para resolver o problema.

### 3.3 Grafos Hamiltonianos

Um caminho que contém todos os vértices de  $G$  é chamado um **caminho hamiltoniano** de  $G$ . De maneira semelhante, um ciclo que contém todos os vértices de  $G$  é chamado um **ciclo hamiltoniano**. Um grafo é **hamiltoniano** se ele contém um ciclo hamiltoniano.

Desta forma, um grafo é hamiltoniano se é possível percorrer seus vértices sem passar por uma mesma aresta ou vértice duas vezes (exceto o vértice final e inicial), terminando o trajeto no local de partida. Observe que a definição não exige que se passe por todas as arestas do grafo. Por exemplo, na figura a seguir temos um exemplo de grafo hamiltoniano, onde as arestas que formam o ciclo hamiltoniano estão destacadas em negrito e as demais arestas do grafo estão tracejadas.

Figura 52 – Um grafo hamiltoniano e um ciclo hamiltoniano.



Fonte: A autora.

Apesar de a definição de grafos hamiltonianos apresentar uma certa semelhança com a de grafos eulerianos, não são conhecidas condições necessárias e suficientes não triviais para que um grafo seja hamiltoniano. A seguir, apresentamos uma condição necessária para que um o grafo seja hamiltoniano. Lembramos que denotamos por  $\omega(H)$  o número de componentes conexas do grafo  $H$ .

**Proposição 3.1.** *Se  $G$  é hamiltoniano, então para qualquer subconjunto próprio não vazio de  $V(G)$  tem-se*

$$\omega(G - S) \leq |S|.$$

**Demonstração:** Sejam  $C$  um ciclo hamiltoniano de  $G$  e  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  um subconjunto próprio e não vazio de  $V(G)$ . Se retirarmos um vértice, digamos  $v_1$ , de  $C$ , bem como as arestas adjacentes a esse vértice, o grafo resultante continua conexo, pois  $C$  é um ciclo. Desta forma,

$$\omega(C - \{v_1\}) \leq |\{v_1\}| = 1.$$

Agora, ao retirarmos um vértice  $v_2$ , bem como as arestas adjacentes, de  $C - \{v_1\}$ , temos que o grafo resultante possui no máximo duas componentes conexas. Assim,

$$\omega(C - \{v_1, v_2\}) \leq |\{v_1, v_2\}| = 2.$$

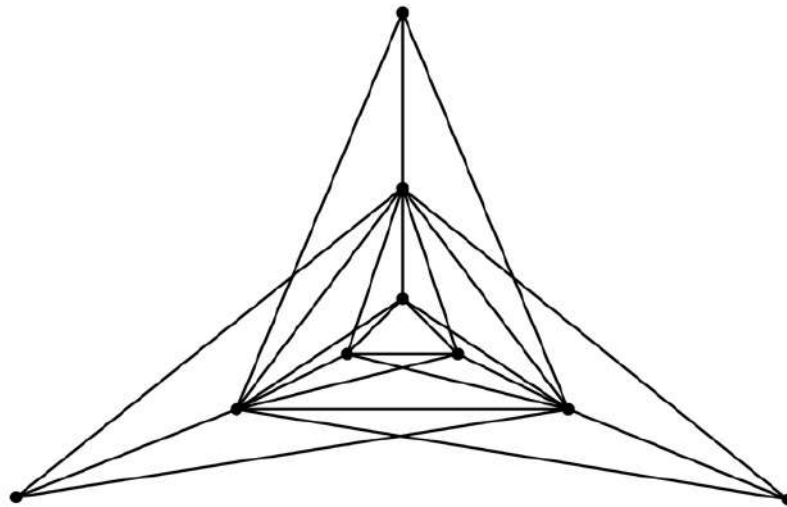
Continuando com o processo, a retirada de cada vértice, bem como as arestas adjacentes, de  $C - \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$  resulta em um grafo que possui no máximo uma componente conexa a mais do que o anterior. Portanto,

$$\omega(C - S) \leq |S| = k.$$

Por fim, observe que  $G - S$  e  $C - S$  têm os mesmos vértices, e podemos obter  $G - S$  a partir de  $C - S$  adicionando arestas, temos que  $G - S$  tem menos componentes conexas do que  $C - S$ , ou seja,  $\omega(G - S) \leq \omega(C - S)$ , de onde segue o resultado. □

**Exemplo 3.1.** Considere o grafo representado a seguir:

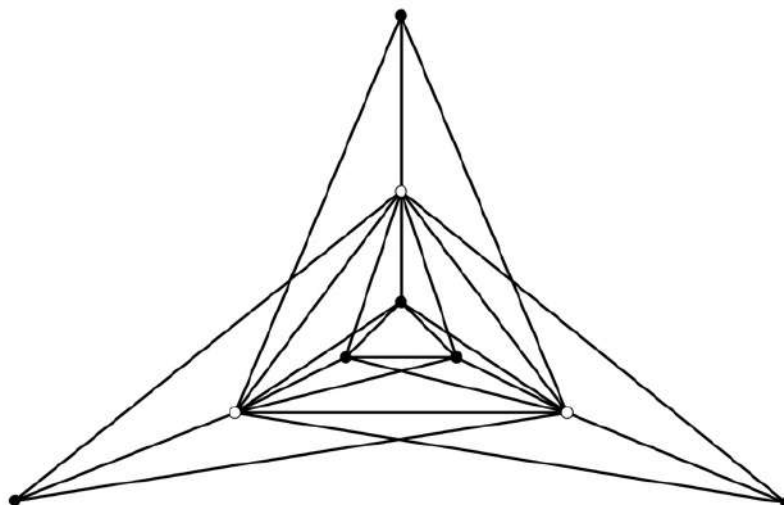
Figura 53 – O grafo é hamiltoniano ou não?



Fonte: A autora.

*Não é uma tarefa fácil decidir, a partir da definição, se o grafo é hamiltoniano ou não. No entanto, observe que quando removemos os 3 vértices representados por um ponto sem preenchimento na Figura 54.*

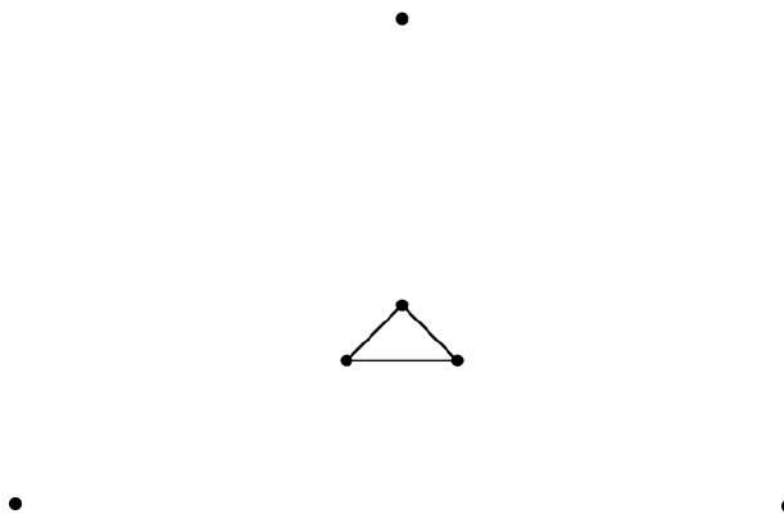
Figura 54 – Os vértices sem preenchimento serão removidos.



Fonte: A autora.

*juntamente com as arestas adjacentes a eles, obtemos o grafo com 4 componentes conexas dado na Figura 55.*

Figura 55 – O grafo resultante possui 4 componentes conexas.



Fonte: A autora.

*Pelo resultado anterior, o grafo dado não é hamiltoniano.*

O teorema a seguir, devido a Dirac (1952), fornece condições suficientes para um grafo ser hamiltoniano. Em sua demonstração, usaremos os seguintes fatos: todo grafo completo com 3 ou mais vértices é hamiltoniano, pois nesse caso cada vértice está ligado

a todos os outros. Além disso, dado um número qualquer de vértices, é sempre possível construir um grafo não hamiltoniano com a quantidade de vértices dada (basta tomar um grafo sem aresta alguma). Desta forma, dado um grafo não hamiltoniano  $H$  sempre existe um grafo não hamiltoniano  $G$  com o mesmo conjunto de vértices de  $H$  que é maximal, no sentido em que  $G$  não é subgrafo próprio de outro grafo não hamiltoniano com o mesmo conjunto de vértices. Além disso, usaremos a seguinte notação: dado um grafo  $G$  tal que os vértices  $u$  e  $v$  não são adjacentes, denotamos por  $G + uv$  o grafo obtido a partir de  $G$  acrescentando a aresta que torna  $u$  e  $v$  adjacentes. Lembramos ainda que  $\delta(G)$  denota o grau mínimo dos vértices de  $G$ .

**Teorema 3.3.** *Se  $G$  é um grafo com  $|V| \geq 3$  e  $\delta(G) \geq |V|/2$ , então  $G$  é hamiltoniano.*

**Demonstração:** Vamos fazer a demonstração por absurdo. Suponha que exista um grafo satisfazendo as hipóteses do teorema e que seja não hamiltoniano. Tome um grafo não hamiltoniano maximal  $G$ , com  $|V| \geq 3$  e  $\delta \geq |V|/2$ . Como  $G$  não pode ser completo, existem dois vértices  $u$  e  $v$  que não são adjacentes. Pela maximalidade de  $G$ , temos que o grafo  $G + uv$  é hamiltoniano e que cada ciclo hamiltoniano de  $G + uv$  contém a aresta  $uv$ . Assim, existe um ciclo hamiltoniano  $v_1v_2 \dots v_n$ , em  $G$ , com  $n = |V|$ , origem em  $v_1 = u$  e ponto final em  $v_n = v$ . Defina os conjuntos

$$S = \{v_i : uv_{i+1} \in A(G)\} \quad \text{e} \quad T = \{v_i : v_iv \in A(G)\}.$$

Uma vez que  $v \notin S \cup V$  temos que

$$|S \cup T| < n.$$

Além disso,

$$|S \cap T| = 0,$$

pois se existir um vértice  $v_i$  em  $S \cap T$ , então podemos construir o ciclo hamiltoniano

$$v_1v_2 \dots v_iv_nv_{n-1} \dots v_{i+1}v_1$$

em  $G$ , o que contradiz o fato de  $G$  ser não hamiltoniano. Como o ciclo hamiltoniano dado passa por todos os vértices de  $G$  temos que  $d(u) = |S|$  e  $d(v) = |T|$ . Portanto,

$$d(u) + d(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| = n + 0 < n,$$

o que contradiz a hipótese de que cada vértice tem grau maior ou igual  $n/2$ . □

**Lema 3.2.** *Sejam  $G$  um grafo e  $u$  e  $v$  vértices não adjacentes de  $G$  tais que  $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$ . Então  $G$  é hamiltoniano se e somente se  $G + uv$  é hamiltoniano.*

**Demonstração:** Se  $G$  é hamiltoniano, então  $G + uv$  é claramente hamiltoniano. Reciprocamente, se  $G + uv$  é hamiltoniano mas  $G$  não é, então a construção feita na demonstração do teorema anterior mostra que

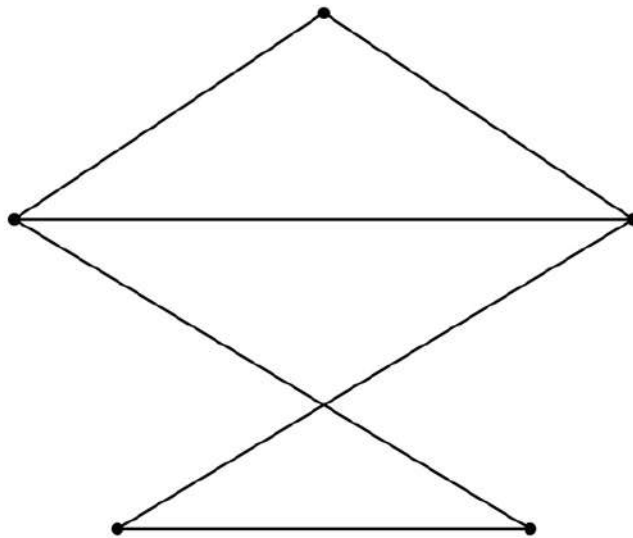
$$d(u) + d(v) < |V(G)|,$$

contradizendo a hipótese do lema. □

Inspirado no lema anterior, queremos definir o **fecho** de um grafo  $G$  como o grafo obtido a partir de  $G$  juntando recursivamente pares de vértices não adjacentes cujas somas dos graus é no mínimo  $|V(G)|$ , até que não reste nenhum tal par. Para que a definição não seja ambígua, precisamos mostrar que tal construção origina um único grafo, que será denotado por  $fe(G)$ . Antes de tal demonstração, vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 3.2.** *Considere o grafo a seguir:*

Figura 56 – Um grafo.

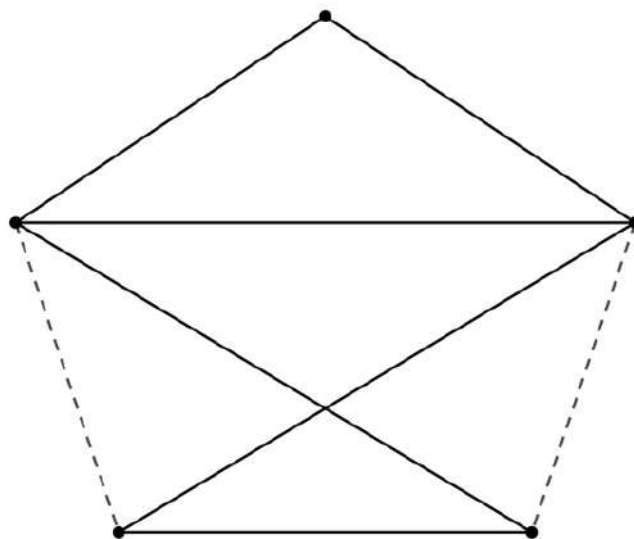


Fonte: A autora.

*Para construir seu fecho, observe que  $|V(G)| = 5$ . Assim, devemos inicialmente unir todos os pares de vértices tais que a soma dos graus é maior ou igual a 5. Como todos os vértices têm grau 2 ou 3, e os vértices de grau 3 já são adjacentes, começamos unindo os vértices de grau 2 aos de grau 3:*



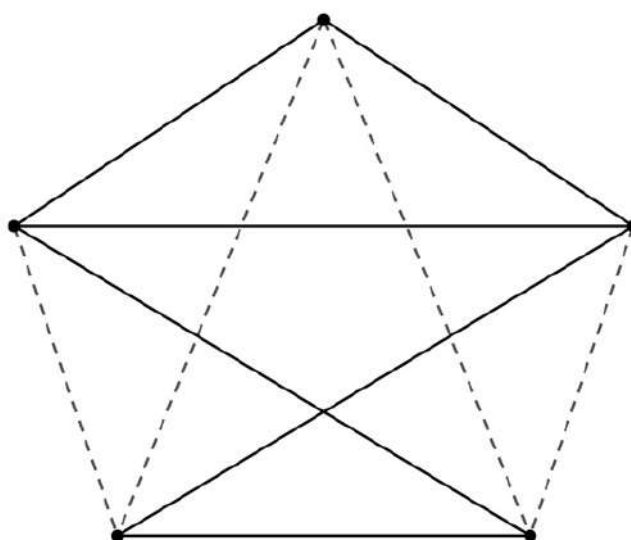
Figura 57 – Construção do fecho.



Fonte: A autora.

Nessa etapa, obtemos um vértice de grau 2 (no topo) e o restante com grau 3 ou 4. Assim, devemos ligar o vértice de grau 2 aos vértices de grau 3, obtendo o fecho do grafo dado:

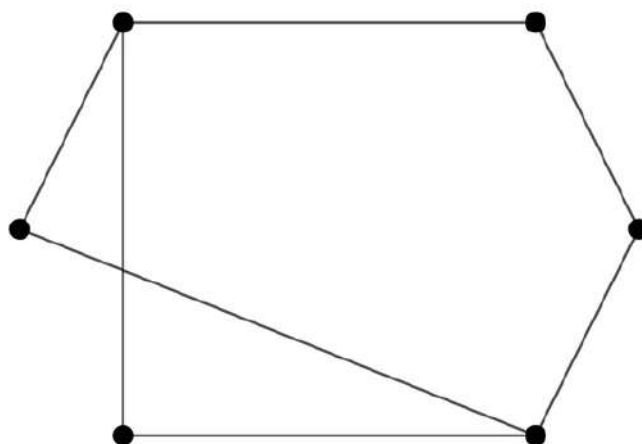
Figura 58 – O fecho do grafo dado.



Fonte: A autora.

**Exemplo 3.3.** Considere o grafo a seguir:

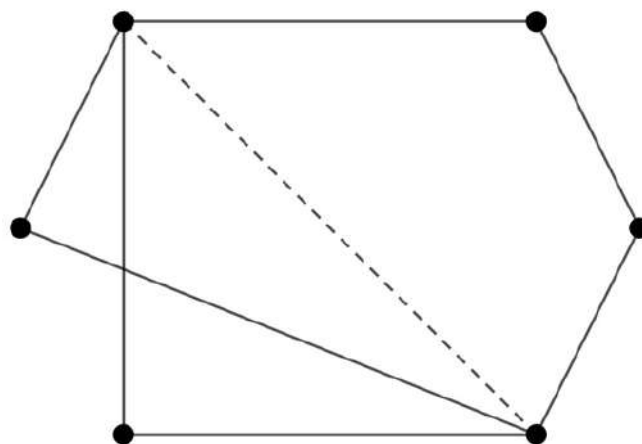
Figura 59 – Um grafo.



Fonte: A autora.

*Temos que  $|V(G)| = 6$  e que os vértices tem grau 2 ou 3. Desta forma, ligamos os vértices de grau 3 entre si:*

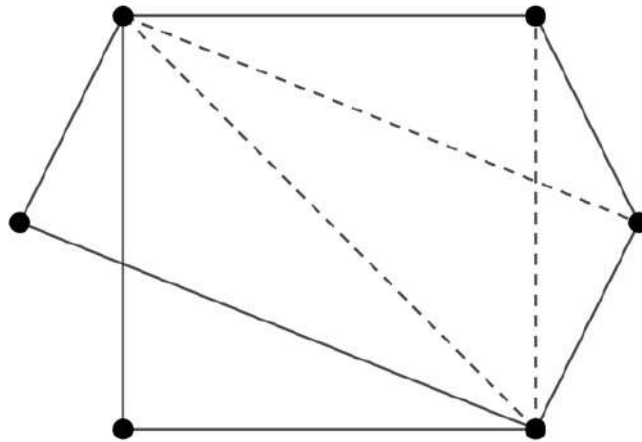
Figura 60 – Construção do fecho.



Fonte: A autora.

*Nessa etapa, obtemos dois vértices com grau 4 e o restante dos vértices com grau 2. Assim, devemos ligar cada vértice de grau 4 aos vértices de grau 2:*

Figura 61 – Fecho do grafo dado.



Fonte: A autora.

Observe que obtemos um grafo cujos graus dos vértices são 2, 3 ou 5. Como os vértices de grau 5 já são adjacentes a todos os vértices e a soma  $2+3$  é menor do que  $|V(G)|$ , não precisamos introduzir novas arestas e o fecho está construído.

Vamos agora verificar que o fecho de um grafo está bem definido.

**Lema 3.3.**  $fe(G)$  está bem definido.

**Demonstração:** Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos construídos a partir de  $G$  juntando recursivamente pares de vértices não adjacentes cujas soma dos graus é maior ou igual a  $|V|$ , até que não reste nenhum tal par. Denote por  $a_1, a_2, \dots, a_k$  e  $b_1, b_2, \dots, b_l$  as sequências de arestas adicionadas a  $G$  para obter  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Vamos mostrar que cada  $a_i$  é uma aresta de  $G_2$  e que cada  $b_j$  é uma aresta de  $G_1$ . Suponha, por absurdo, que exista  $a_i$  que não é aresta de  $G_2$  e seja  $a_{m+1} = uv$  a primeira aresta da sequência  $a_1, \dots, a_k$  satisfazendo essa condição. Defina  $H = G + \{a_1, \dots, a_m\}$ . Pela definição de  $G_1$ , temos que

$$d_H(u) + d_H(v) \geq |V|.$$

Pela escolha de  $a_{m+1}$ , temos que  $H$  é um subgrafo de  $G_2$ . Assim,

$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq |V|.$$

Mas isto implica que  $uv$  pertence a  $G_2$ , o que é uma contradição. Portanto, cada  $a_i$  é uma aresta de  $G_2$ . Analogamente mostra-se que cada  $b_j$  é uma aresta de  $G_1$ , de onde se conclui que  $G_1 = G_2$  e, portanto,  $fe(G)$  está bem definido.

□

Temos agora o seguinte resultado:

**Teorema 3.4.** *Um grafo é hamiltoniano se e somente se seu fecho é hamiltoniano.*

**Demonstração:** Basta aplicar o Lema 3.2 a cada vez que uma aresta é adicionada na formação do fecho.  $\square$

Usando o fato de que grafos completos com pelos menos 3 vértices são hamiltonianos, o teorema anterior tem a seguinte consequência.

**Corolário 3.3.** *Seja  $G$  um grafo com  $|V| \geq 3$ . Se  $fe(G)$  é completo, então  $G$  é hamiltoniano.*

Observe que se  $G$  é um grafo com  $\delta \geq |V|/2$ , então seu fecho é um grafo completo, pois a soma dos graus de qualquer par de vértices é maior ou igual a  $|V|/2 + |V|/2 = |V|$ . Desta forma, a condição de Dirac (Teorema 3.3) é uma consequência do corolário anterior. Uma condição mais geral do que a de Dirac foi obtida em 1972 por Chvátal, e é apresentada no teorema a seguir.

**Teorema 3.5.** *Seja  $G$  um grafo com sequência de graus  $(d_1, d_2, \dots, d_{|V|})$ , onde  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{|V|}$  e  $|V| \geq 3$ . Suponha que não exista valor para  $m$  menor do que  $|V|/2$  tal que  $d_m \leq m$  e  $d_{|V|-m} \leq |V| - m$ . Então  $G$  é hamiltoniano.*

**Demonstração:** Seja  $G$  um grafo satisfazendo as hipóteses do enunciado. Vamos mostrar que seu fecho é completo, e assim o Corolário 3.3 implica que  $G$  é hamiltoniano. Denotaremos por  $d'(v)$  o grau de um vértice em  $fe(G)$ . Suponha, por absurdo, que  $fe(G)$  não é completo. Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices não adjacentes em  $fe(G)$ , com

$$d'(u) \leq d'(v)$$

e  $d'(u) + d'(v)$  o maior possível. Como  $u$  e  $v$  são não adjacentes e estão no fecho de  $G$ , a soma de seus graus deve ser menor do que  $|V|$ .

Agora, denote por  $S$  o conjunto dos vértices em  $V - \{v\}$  que não são adjacentes a  $v$  em  $fe(G)$  e por  $T$  o conjunto dos vértices em  $V - \{u\}$  que não são adjacentes a  $u$  em  $fe(G)$ . Observe que  $S$  é obtido tomando-se os elementos de  $V - \{v\}$  e retirando-se aqueles que são adjacentes a  $v$ . Desta forma,

$$|S| = |V| - 1 - d'(v).$$

Da mesma forma,

$$|T| = |V| - 1 - d'(u).$$

Além disso, se existir em  $S$  um vértice  $w$  de grau maior do que  $d'(u)$ , então tomando  $w$  no lugar de  $u$  teremos um vértice  $w$  não adjacente a  $v$  com  $d'(w) + d'(v) > d'(u) + d'(v)$ ,

contrariando a escolha de  $u$  e  $v$ . Portanto, o grau de todo vértice em  $S$  é menor ou igual a  $d'(u)$ . Analogamente, o grau de todo vértice em  $T \cup \{u\}$  é menor ou igual a  $d'(v)$ . Escreva  $d'(u) = m$ . Como  $d'(u) + d'(v) < |V|$ , concluímos que  $d'(v) < |V| - m$ . Usando este fato, temos

$$|S| = |V| - 1 - d'(v) > |V| - 1 - (|V| - m) = m - 1.$$

Assim,  $fe(G)$  possui ao menos  $m$  vértices com grau menor ou igual a  $m$  (que são, pelo menos, os elementos de  $S$ ). Além disso, como

$$|T \cup \{u\}| = |T| + 1 = |V| - 1 - m + 1 = |V| - m,$$

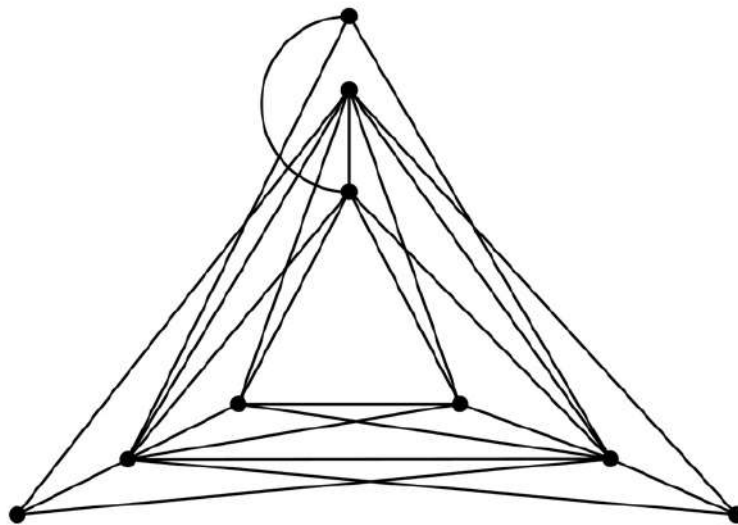
concluímos também que  $fe(G)$  possui ao menos  $|V| - m$  vértices com grau menor ou igual a  $|V| - m$ . Como  $G$  é um subgrafo de  $fe(G)$ , com os mesmos vértices e obtido pela retirada de algumas arestas, o mesmo vale para  $G$ , isto é,  $G$  possui ao menos  $m$  vértices de grau menor ou igual a  $m$  e ao menos  $|V| - m$  vértices de grau menor ou igual a  $|V| - m$ . Portanto,  $d_m \leq m$  e  $d_{|V|-m} \leq |V| - m$ . Mas isso contraria a hipótese, pois como tomamos  $m \leq d'(v)$  e  $m + d'(v) < |V|$ , temos  $m < |V|/2$ .

Concluímos assim que a escolha de  $u$  e  $v$  como feita acima é impossível e, portanto, o fecho de  $G$  é completo. Pelo Lema 3.3, segue que  $G$  é hamiltoniano.  $\square$

Observe que as condições do Teorema anterior de fato são mais gerais do que a condição de Dirac, pois se o grau mínimo dos vértices de  $G$  é maior ou igual a  $|V|/2$ , então tomando a sequência de graus  $(d_1, d_2, \dots, d_{|V|})$ , não existe  $m < |V|/2$  com  $d_m \leq m < |V|/2$ . A seguir, temos um exemplo de aplicação do teorema anterior.

**Exemplo 3.4.** Considere o grafo representado pela figura a seguir:

Figura 62 – Um grafo.



Fonte: A autora.

Temos que  $|V| = 9$  e a sequência de graus é  $(3, 3, 3, 5, 5, 6, 7, 8, 8)$ . Vamos verificar que não existe  $m < |V|/2 = 9/2$  com  $d_m \leq m$  e  $d_{9-m} < 9 - m$ . Como  $d_1 = d_2 = 3$ , temos que  $m = 1$  e  $m = 2$  não satisfazem a primeira desigualdade. Para  $m = 3$ , temos a primeira desigualdade satisfeita, mas como  $d_6 = 6$  a segunda desigualdade não é satisfeita. Analogamente, para  $m = 4$  a primeira desigualdade é satisfeita, mas como  $d_5 = 5$  a segunda não o é. Portanto, pelo Teorema 3.5 temos que o grafo dado é hamiltoniano.

Utilizando a sequência de graus de um grafo, podemos obter mais alguns resultados. Para isso, precisamos de algumas definições adicionais. Diremos que a sequência  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  de números reais é **majorada** por outra sequência  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  de números reais se  $p_i \leq q_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Um grafo  $G$  é **grau-majorado** por outro grafo  $H$  se  $V(G) = V(H)$  e a sequência não decrescente de vértices de  $G$  é majorada pela sequência não decrescente de vértices de  $H$ . Usando o fato que a relação “ $\leq$ ” é uma relação de ordem no conjunto dos números reais, é fácil perceber que a relação “ $G \sim H \Leftrightarrow G$  é grau-majorado por  $H$  determina uma relação de ordem em cada conjunto dos grafos com  $n$  vértices.

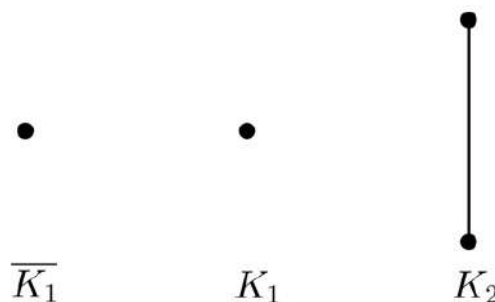
A **união** de dois grafos  $G$  e  $H$  é o grafo  $G \cup H$  tal que os conjuntos de vértices e de arestas são dados, respectivamente, pelas uniões dos conjuntos de vértices e de arestas de  $G$  e de  $H$ . A **junção** de dois grafos disjuntos (isto é, sem vértices e sem arestas em comum)  $G$  e  $H$  é o grafo  $G \vee H$  obtido a partir de  $G \cup H$  introduzindo arestas que tornem cada vértice de  $G$  adjacente a cada vértice de  $H$ .

Lembramos que denotamos por  $K_m$  o grafo completo de  $m$  vértices e por  $\overline{G}$  o complementar de um grafo  $G$  (veja seção 2.1). Dados dois inteiros  $m$  e  $n$  com  $1 \leq m < n/2$ , denotaremos por  $C_{m,n}$  o grafo

$$K_m \vee (\overline{K_m} \cup K_{n-2m}).$$

**Exemplo 3.5.** Tomemos  $m = 1$  e  $n = 4$ . Os grafos  $\overline{K_1} = K_1$  e  $K_{n-2m} = K_2$  estão representados na Figura 63.

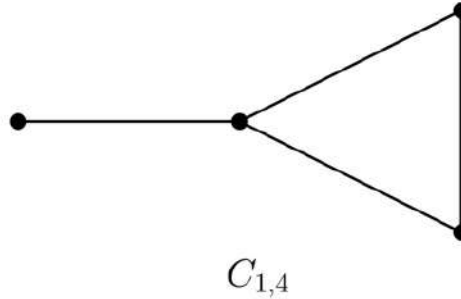
Figura 63 – Grafos  $\overline{K_1}$ ,  $K_1$  e  $K_2$ .



Fonte: A autora.

Obtemos  $C_{1,4}$  adicionando arestas que liguem o único vértice de  $K_1$  à todos os vértices dos demais grafos:

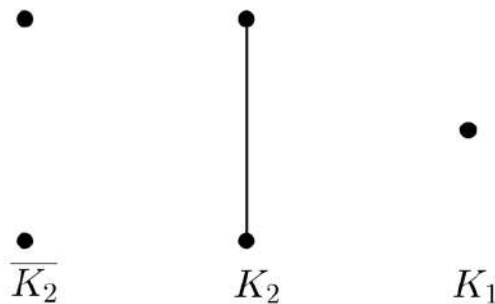
Figura 64 – O grafo  $C_{1,4}$ .



Fonte: A autora.

**Exemplo 3.6.** Considere  $m = 2$  e  $n = 5$ . Os grafos  $\overline{K_2}$ ,  $K_2$  e  $K_{n-2m} = K_1$  estão representados na figura a seguir:

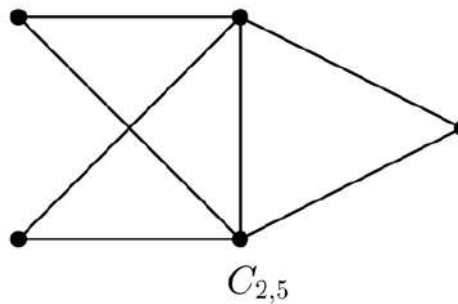
Figura 65 –  $\overline{K_2}$ ,  $K_2$  e  $K_1$ .



Fonte: A autora.

Para obter  $C_{2,5}$ , basta unir os vértices de  $K_2$  a todos os demais vértices:

Figura 66 – O grafo  $C_{2,5}$ .



Fonte: A autora.

Os grafos  $C_{m,n}$  são sempre não hamiltonianos, conforme mostra o lema a seguir:

**Lema 3.4.** Para quaisquer inteiros  $m, n$  para os quais  $C_{m,n}$  está definido, temos que  $C_{m,n}$  é não hamiltoniano.

**Demonstração:** Basta aplicar a Proposição 3.1: retirando de  $C_{m,n}$  os  $m$  vértices de  $K_m$ , juntamente com as arestas adjacentes a estes vértices, restam os grafos  $\overline{K_m}$ , que possui  $m$  componentes conexas, e  $K_{n-2m}$ , que possui uma componente conexa, totalizando  $m + 1$  componentes conexas.  $\square$

O próximo resultado mostra que os grafos  $C_{m,n}$  são não hamiltonianos maximais com respeito a relação de grau-majorado.

**Teorema 3.6.** Se  $G$  é um grafo não hamiltoniano com  $|V| \geq 3$ , então  $G$  é grau-majorado por algum  $C_{m,|V|}$ .

**Demonstração:** Seja  $G$  um grafo não hamiltoniano com sequência de graus  $(d_1, d_2, \dots, d_{|V|})$ , onde  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{|V|}$  e  $|V| \geq 3$ . Pelo Teorema 3.5, existe  $m < |V|/2$  tal que  $d_m \leq m$  e  $d_{|V|-m} < |V| - m$ . Como a sequência é não-decrescente, isso significa que os  $m$  primeiros termos são menores ou iguais a  $m$  e os próximos  $(|V| - m) - m = |V| - 2m$  são menores ou iguais a  $|V| - m - 1$ . Além disso, o grau de qualquer vértice deste grafo é no máximo  $|V| - 1$ . Portanto,  $(d_1, d_2, \dots, d_{|V|})$  é majorada pela sequência

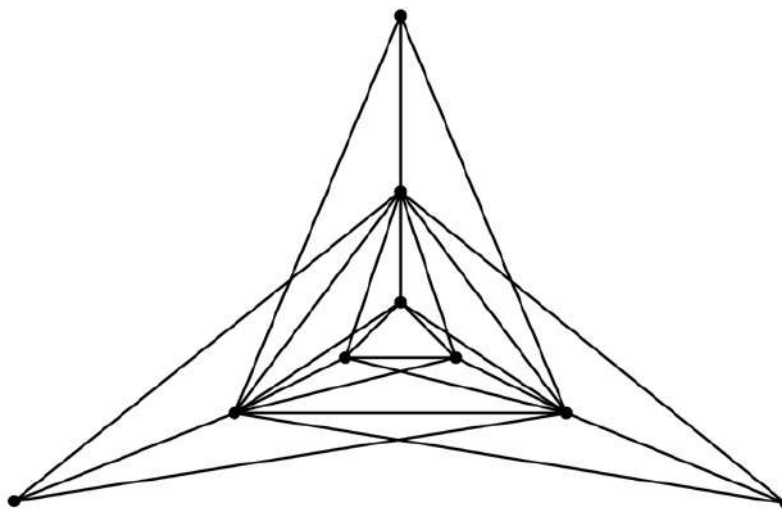
$$(m, \dots, m, |V| - m - 1, \dots, |V| - m - 1, |V| - 1, \dots, |V| - 1)$$

formada por  $m$  termos iguais a  $m$ ,  $|V| - 2m$  termos iguais a  $|V| - m - 1$  e  $m$  termos iguais a  $|V| - 1$ . Observe que esta sequência tem  $m + |V| - 2m + m = |V|$  termos e é a sequência de graus de  $C_{m,|V|}$ , o que prova o resultado.  $\square$

**Exemplo 3.7.** Consideremos novamente o grafo não hamiltoniano visto no Exemplo 3.1:



Figura 67 – Um grafo não hamiltoniano.

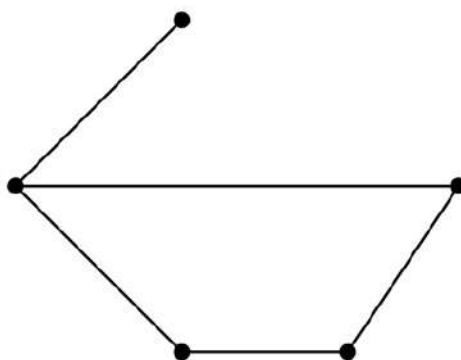


Fonte: A autora.

Sua sequência não-decrescente de graus é  $(3, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 8, 8)$ . Observe que para  $m = 3$  temos  $d_m = 3 \leq 3 = m$  e  $d_{|V|-m} = d_6 = 5 < 6 = |V| - m$ . Além disso, esta é exatamente a sequência de graus de  $C_{3,9} = K_3 \vee (\overline{K_3} \cup K_3)$ . Na figura, os três vértices mais externos e os três mais internos correspondem a  $\overline{K_3} \cup K_3$ . Os vértices restantes correspondem ao  $K_3$  da primeira “parcela” de  $K_3 \vee (\overline{K_3} \cup K_3)$ .

**Exemplo 3.8.** Considere o grafo representado na figura a seguir:

Figura 68 – Um grafo não hamiltoniano.



Fonte: A autora.

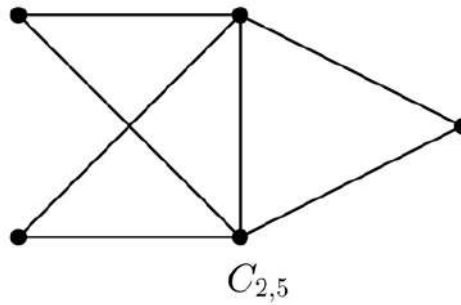
Ele é claramente não hamiltoniano, pois se considerarmos um passeio iniciando no vértice localizado na parte superior (de grau 1), a única maneira de retornar a este vértice é passando novamente pela aresta inicial. Alternativamente, podemos verificar que o grafo é não hamiltoniano usando a Proposição 3.1: se removermos o vértice de grau 3, localizado mais à esquerda, juntamente com as arestas a ele adjacentes, obtemos um grafo

com duas componentes conexas. Sua seqüência de graus é  $(1, 2, 2, 2, 3)$ . Para  $m = 2$ , temos que  $d_m = 2 \leq 2 = m$  e  $d_{|V|-m} = d_3 = 2 < 3 = |V| - m$ . Procedendo como na demonstração do teorema anterior, essa seqüência é majorada pela seqüência

$$(m, m, |V| - m - 1, |V| - 1, |V| - 1) = (2, 2, 2, 4, 4).$$

Esta é a seqüência de graus do grafo  $C_{2,5}$ , já construído no Exemplo 3.6:

Figura 69 – O grafo não hamiltoniano maximal contendo o grafo dado.



Fonte: A autora.

Como consequência do teorema anterior, podemos obter uma condição suficiente, envolvendo o número de arestas, para que um grafo seja hamiltoniano. Usamos a notação clássica

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Observe que

$$\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^3 - 3n + 3}{2}.$$

**Corolário 3.4.** *Seja  $G$  é um grafo com  $|V(G)| \geq 3$ . Se  $|A(G)| > \binom{|V(G)|-1}{2} + 1$ , então  $G$  é hamiltoniano. Além disso, os únicos grafos não hamiltonianos com  $|V|$  vértices e  $\binom{|V|-1}{2}$  arestas são  $C_{1,|V|}$  e, para  $|V| = 5$ ,  $C_{2,5}$ .*

**Demonstração:** Denote  $|V| = n$ . Vamos mostrar a contra-recíproca da primeira afirmação: Se  $G$  é um grafo não hamiltoniano, com pelo menos três vértices, então  $|A(G)| \leq \binom{n-1}{2}$ . Sendo  $G$  não hamiltoniano, o Teorema 3.6 implica que  $G$  é grau-majorado por  $C_{m,n}$ , para algum inteiro  $m < n/2$ . Utilizamos agora o Teorema 2.1 e obtemos a seguinte seqüência de desigualdades ou igualdades, na qual as parcelas em negrito foram obtidas

somando e subtraindo um mesmo valor:

$$\begin{aligned}
|A(G)| &\leq |A(C_{m,n})| \\
&= \frac{1}{2}[m^2 + (n - 2m)(n - m - 1) + m(n - 1)] \\
&= \frac{1}{2}[m^2 + (n - 2m - \mathbf{1} + \mathbf{1})(n - 1 - m + \mathbf{1} - \mathbf{1}) + m(n - 1)] \\
&= \frac{1}{2}[m^2 + ((n - 2m - 1) + 1)((n - 2) - (m - 1)) + m(n - 1)] \\
&= \frac{1}{2}[m^2 + (n - 2)(n - 2m - 1) - (m - 1)(n - 2m - 1) + (n - 2) - (m - 1) + m(n - 1)] \\
&= \frac{1}{2}[m^2 + (n - 2)(n - 2m - 1) - \mathbf{2}(\mathbf{m} - \mathbf{1})(\mathbf{n} - \mathbf{2m} - \mathbf{1}) + (n - 2) - (m - 1) + m(n - 1) + \\
&\quad + (\mathbf{m} - \mathbf{1})(\mathbf{n} - \mathbf{2m} - \mathbf{1})] \\
&= \frac{1}{2}[m^2 + n^2 - 2mn - n - 2n + 4m + 2 - 2(m - 1)(n - 2m - 1) + n - 2 - m + 1 + \\
&\quad + mn - m + mn - 2m^2 - m - n + 2m + 1] \\
&= \frac{1}{2}[-m^2 + n^2 + 3m - 3n + 2 + \mathbf{3} - \mathbf{3} - 2(m - 1)(n - 2m - 1)] \\
&= \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 3) + \frac{1}{2}2 - \frac{1}{2}(m^2 - 3m + 3) - \frac{1}{2}2(m - 1)(n - 2m - 1) \\
&= \binom{n - 1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m - 1)(m - 2) - \frac{1}{2}2(m - 1)(n - 2m - 1)
\end{aligned}$$

Como  $n > 2m$  e  $m, n \geq 1$  temos

$$-\frac{1}{2}(m - 1)(m - 2) - \frac{1}{2}2(m - 1)(n - 2m - 1) \leq 0.$$

Desta forma, concluímos que

$$\begin{aligned}
|A(G)| &\leq |A(C_{m,n})| \\
&= \binom{n - 1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m - 1)(m - 2) - \frac{1}{2}2(m - 1)(n - 2m - 1) \\
&\leq \binom{n - 1}{2} + 1
\end{aligned}$$

Isso prova a primeira afirmação do corolário. Para a segunda afirmação, observe que se  $|A(G)| = \binom{n - 1}{2} + 1$ , então as duas desigualdades que aparecem na expressão anterior são necessariamente igualdades. A primeira delas implica que a sequência não decrescente de graus de  $G$  coincide com a de  $C_{m,n}$ . Para que a segunda desigualdade seja uma igualdade, é necessário que

$$\frac{1}{2}(m - 1)(m - 2) + \frac{1}{2}2(m - 1)(n - 2m - 1) = 0.$$

Se  $m = 1$ , então para qualquer valor de  $n$  a última igualdade é satisfeita. Se  $m = 2$ , então tal igualdade só é satisfeita quando  $n = 5$ . Para  $m \geq 3$ , observe que a primeira parcela é

estritamente positiva enquanto que a segunda é sempre não negativa (pois  $n > 2m$ ) e assim a soma não se anula. Portanto, se  $|A(G)| = \binom{n-1}{2} + 1$ , então  $G$  tem a sequência de graus igual a de  $C_{1,n}$ ,  $(1, n-2, n-2, \dots, n-2, n-1)$  ou de  $C_{2,5}$ ,  $(2, 2, 2, 4, 4)$ , o que implica que  $G$  é isomorfo a um desses grafos.  $\square$

### 3.3.1 Uma Aplicação: O Problema do Caixeiro Viajante

Um caixeiro viajante deseja visitar um número de cidades e então voltar ao seu ponto de origem. Dados os tempos de deslocamento entre as cidades, como ele deve planejar seu itinerário de tal forma que visite cada cidade exatamente uma vez e o tempo total de deslocamento entre as cidades seja o menor possível? Este problema é conhecido como **o problema do caixeiro viajante**. Em termos da teoria dos grafos, o objetivo é encontrar um ciclo hamiltoniano de peso mínimo em um grafo valorado. Um tal ciclo será chamado de **ciclo ótimo**. Em contraste com os problemas anteriores, nenhum algoritmo eficiente para a resolução do problema é conhecido. Desta forma, é desejável ter um método para obter ao menos uma solução “razoavelmente boa”. Uma estratégia para isto é obter um ciclo hamiltoniano inicial  $C$  e então procurar por outro de peso menor através de modificações em  $C$ . Isto pode ser feito da seguinte maneira: Seja  $C = v_1v_2 \dots v_{|V|}v_1$  um ciclo hamiltoniano. Para quaisquer  $i, j$  com  $1 < i+1 < j < |V|$  podemos obter um novo ciclo

$$C_{i,j} = v_1v_2 \dots v_iv_jv_{j-1} \dots v_{i+1}v_{j+1}v_{j+2} \dots v_{|V|}v_1$$

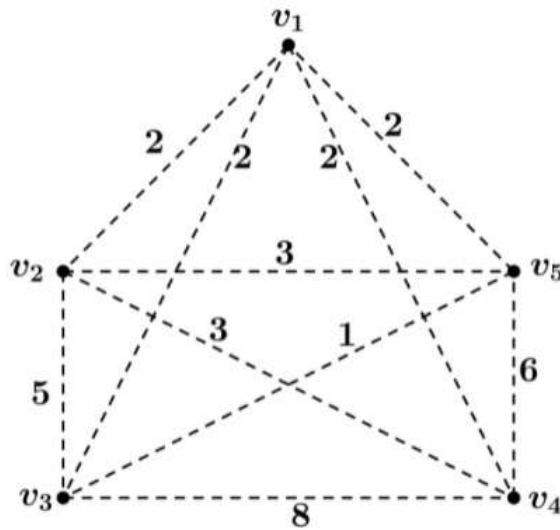
deletando as arestas  $v_iv_{i+1}$  e  $v_jv_{j+1}$  e adicionando as arestas  $v_iv_j$  e  $v_{i+1}v_{j+1}$ . Se, para algum  $i$  e  $j$ , tivermos

$$w(v_i)w(v_j) + w(v_{i+1})w(v_{j+1}) < w(v_iv_{i+1})w(v_jv_{j+1}),$$

então o ciclo  $C_{ij}$  é uma melhoria de  $C$ . Podemos então repetir o processo, até que não seja mais possível obter melhorias por esse método. Quase certamente não obteremos um ciclo ótimo, mas podemos melhorar o resultado refazendo o procedimento iniciando por ciclos diferentes. Uma indicação de o quanto a solução obtida é boa pode, em alguns casos, ser obtida utilizando o algoritmo de Kruskal. Suponha que  $C$  é um ciclo ótimo em  $G$ . Então, para qualquer vértice  $v$ ,  $C - \{v\}$  é um caminho hamiltoniano em  $G - \{v\}$  e portanto uma árvore geradora de  $G - \{v\}$ . Segue que se  $T$  é uma árvore ótima em  $G - \{v\}$ , e se  $b$  e  $c$  são arestas incidentes com  $v$  tal que  $w(b) + w(c)$  é o menor possível, então  $W(T) + w(b) + w(c)$  é um limitante inferior para  $W(C)$ .

A título de ilustração, considere o grafo valorado a seguir:

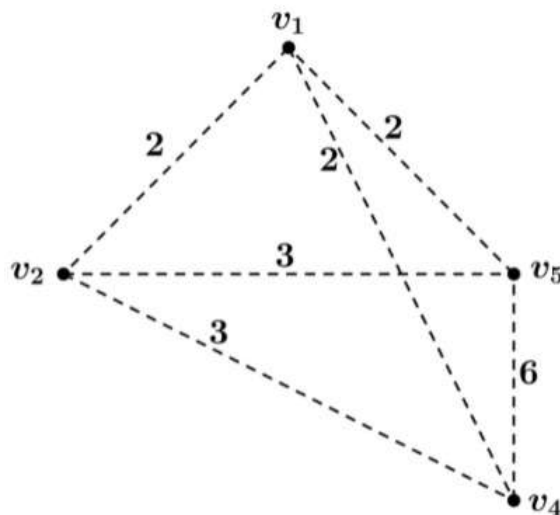
Figura 70 – Um grafo valorado.



Fonte: A autora.

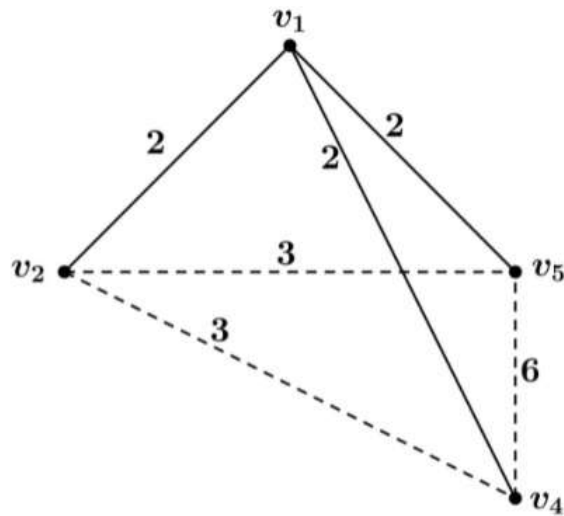
Temos que  $C = v_1v_2v_3v_4v_5v_1$  é um ciclo hamiltoniano de peso 23, que pode ser melhorado pelo ciclo  $C_{2,4} = v_1v_2v_4v_3v_5v_1$ , de peso 16. Para obter um limitante inferior para o peso de um ciclo ótimo, vamos remover o vértice  $v_3$ , bem como as arestas adjacentes a esse vértice. Obtemos o seguinte grafo:

Figura 71 – O grafo  $G - v_3$ .



Fonte: A autora.

Nesse caso particular, é fácil construir a árvore ótima, mesmo sem o uso de algoritmos: basta tomar as arestas de menor peso:

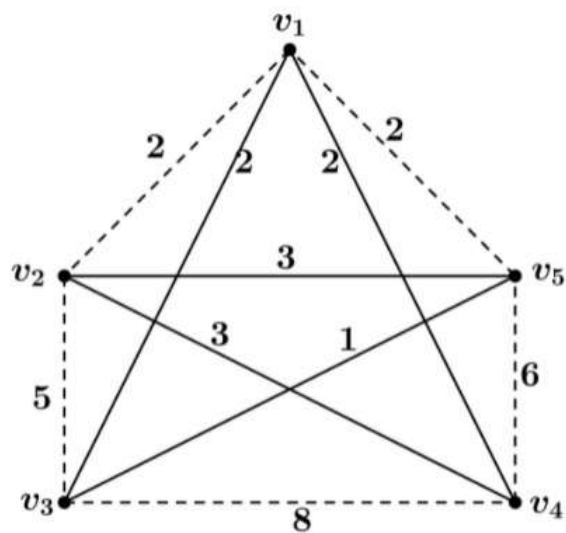
Figura 72 – Uma árvore ótima em  $G - v_3$ .

Fonte: A autora.

Desta forma, a árvore ótima tem peso 6. Somando os menores pesos de duas arestas ligadas com  $v_3$ , que são 1 e 2, vemos que o peso mínimo de um ciclo ótimo deve ser 9.

Diferente da situação geral, neste exemplo não é difícil determinar um ciclo ótimo: observe que  $v_1v_3v_5v_2v_4v_1$  é um ciclo hamiltoniano de peso 11. Além disso, se usarmos as arestas de peso 5, 6 ou 8, obteremos um ciclo de peso maior do que 11. Agora, se o início de um ciclo ótimo for  $v_1v_2$ , as possíveis continuações são  $v_1v_2v_5$  ou  $v_1v_2v_4$ . No primeiro caso, para não incluir a aresta de peso 6, a única continuação é  $v_1v_2v_5v_3$  e a partir daí devemos incluir a aresta de peso 8. No segundo caso, a próxima aresta a ser incluída já terá peso 6 ou 8. Concluimos que um ciclo ótimo não pode conter a aresta  $v_1v_2$ . Com um raciocínio semelhante, um tal ciclo não pode incluir a aresta  $v_1v_5$ . Assim, devemos descartar ciclos que contenham estas arestas, ambas de peso 2, e os menores pesos que podemos utilizar são 1, 2, 2, 3 e 3, cuja soma é 11 e é exatamente o peso do ciclo  $v_1v_3v_5v_2v_4v_1$ . Portanto, este é um ciclo ótimo.

Figura 73 – Um ciclo ótimo em  $G$ .



Fonte: A autora.

## Considerações Finais

*No decorrer deste trabalho, vimos que problemas envolvendo conjuntos finitos de pontos que podem ser conectados sob algum critério, podem ser tratados utilizando Teoria dos Grafos. Esses “pontos” podem ser de natureza diversa: pessoas, cidades, turmas de uma escola, etc. O mesmo ocorre com o critério de “conexão entre os pontos”: estas pessoas se relacionam em uma rede social, estas cidades estão ligadas por uma estrada, estas turmas competiram entre si em algum torneio, etc. Todas essas situações podem ser modeladas via grafos. Mesmo que em algumas situações, como nos primeiros exemplos do Capítulo 2, não seja necessário utilizar resultados avançados da Teoria dos Grafos, a simples utilização da representação via grafos já auxilia em muito a organização da informação dada. Outras situações, como a obtenção da árvore ótima ou de um trajeto “pelo menos razoável” para o problema do caixeiro viajante, utilizam aspectos um pouco mais avançados desta teoria. Acreditamos que o texto aqui elaborado possa servir como uma introdução a leitor que deseje ter um pequeno conhecimento sobre esta teoria.*



# Referências

- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. Graph Theory with Applications. *New York: Elsevier, 1976.*
- BRAGANHOLO, V. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos – Grafos e Digrafos. 2019.
- COSTA, P. P. d. Teoria dos grafos e suas aplicações. *Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011.*
- EVES, H. Introdução à história da matemática. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2011.
- JURKIEWICZ, S. Grafos—uma introdução. São Paulo: OBMEP, 2009.
- NETTO, P. O. B. Grafos: teoria, modelos, algoritmos. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 2003.
- NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, S. Grafos: introdução e prática. [S.l.]: Editora Blucher, 2009.
- O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Galileo Galilei. 2002. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galileo/pictdisplay/>>. Acesso em 18 de jan de 2021.
- OSTROSKI, A.; MENONCINI, L. Aplicac oes praticas da teoria dos grafos. Pato Branco: XIII ERMAC, 2009.
- ROSENHOUSE, J.; TAALMAN, L. Taking sudoku seriously: The math behind the world’s most popular pencil puzzle. [S.l.]: OUP USA, 2011.
- SÁ, L. C.; SILVA, S. A. F. d. Ensinando grafos a partir de abordagem histórico-investigativa. [S.l.]: Ifes, 2016.
- SILVA, J. P. S. Avaliação dos efeitos do envelhecimento na hemodinâmica cerebral por Imagens de Ressonância Magnética. 2018.
- ULIANA, R. M. et al. Identificação de comportamento em carreiras profissionais usando técnicas de ciência de redes. *Universidade Presbiteriana Mackenzie, 2018.*
- VIALI, L. Pesquisa Operacional II Teoria dos Grafos – História e Aplicaç oes da Teoria dos Grafos. 2019.
- WANG JINHUI; ZUO, X. H. Y. Graph-based network analysis of resting-state functional mri. *Frontiers in Systems Neuroscience, 2010.*